Függvények – Analízis
Megoldások

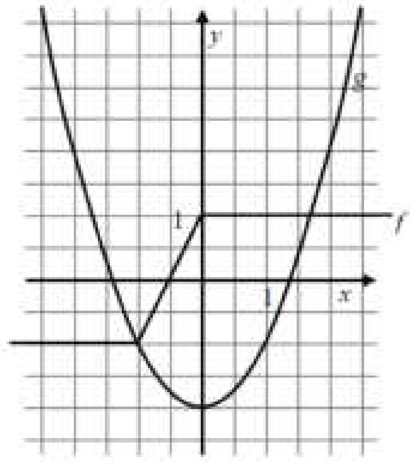
1) Legyen f és g a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \text{ha } x\le -1\\ 2x+1 & \text{ha } -1<x<0\\ 1 & \text{ha } x\ge 0\end{cases} \text{ és } g(x)=x^2-2$$

a) Ábrázolja ugyanabban a koordinátarendszerben mindkét függvényt! Adja meg az $f(x)=g(x)$ egyenlet valós megoldásait! (6 pont)

b) Számítsa ki a két függvény grafikonja által közrefogott zárt síkidom területét! (8 pont)

Megoldás:



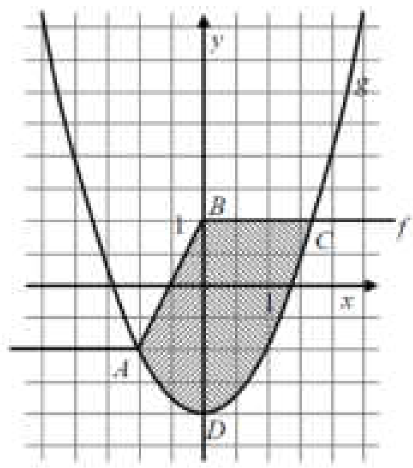
a) A függvények ábrázolása (2 pont)

$-1=x^2-2$ egyenlet megoldása $x\le -1$ feltétel esetén $x=-1$ (1 pont)

$2x+1=x^2-2$ egyenletnek nincs megoldása a $]-1;0[$ intervallumon (1 pont)

$1=x^2-2$ egyenlet megoldása az $x\ge 0$ feltétel esetén $x=\sqrt{3}$ (1 pont)

Az $f(x)=g(x)$ egyenletnek két megoldása van: $\boldsymbol{x_1=-1}$ és $\boldsymbol{x_2=\sqrt{3}}$ (1 pont)



b) Tekintsük az f és g grafikonját, ahol $A(-1;-1)$, $B(0;1)$, $C(\sqrt{3};1)$, $D(0;-2)$ (1 pont)

A vizsgálandó síkidomot az AB, a BC szakaszok és az ADC parabolaív határolja (1 pont)

Vágjuk ketté a síkidomot az y tengellyel. $T_{ABCD}=T_{ABD}+T_{DBC}$ (1 pont)

$$T_{ABD}=\int_{-1}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{3} \quad \text{(1 pont)}$$

$$T_{DBC}=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(3-x^2\right)dx= \quad \text{(1 pont)}$$

$$=\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\sqrt{3}}=2\cdot\sqrt{3} \quad \text{(1 pont)}$$

A keresett terület nagysága: $\frac{5}{3}+2\cdot\sqrt{3}\approx \mathbf{5{,}13}$ (1 pont)

Összesen: 14 pont

2) Legyen adott az $f:[-2,5;2,5]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x$ függvény.

a) Határozza meg az *f* függvény zérushelyeit! **(4 pont)**

b) Vizsgálja meg az *f* függvényt monotonitás szempontjából! **(6 pont)**

c) Adja meg az *f* függvény legnagyobb és legkisebb értékét! **(4 pont)**

Megoldás:

a) Mivel $x^3-3x=\left(x+\sqrt{3}\right)x\left(x-\sqrt{3}\right)$, ezért f zérushelyei lehetnek $\boldsymbol{x_1=-\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{x_2=0}$ és $\boldsymbol{x_3=\sqrt{3}}$. (3 pont)

Az egyenlet mindhárom gyöke eleme az *f* értelmezési tartományának, ezért mindegyik zérushely jó megoldást ad. (1 pont)

b) Az *f* a teljes értelmezési tartományának belső pontjaiban differenciálható függvény, ezért a monotonitás megállapítása és a szélsőértékek megkeresése az első derivált előjelvizsgálatával is történhet. (1 pont)

$f'(x)=3x^2-3$ (1 pont)

Az első derivált értéke 0, ha $x=-1$ és $x=1$. (1 pont)

Ezek az *x* értékek az értelmezési tartomány elemei. Készítsünk táblázatot az f' előjelviszonyai alapján, az *f* menetének meghatározására:

x	$\boldsymbol{-2,5<x<-1}$	$x=-1$	$\boldsymbol{-1<x<1}$	$x=1$	$\boldsymbol{1<x<2,5}$
f'	pozitív	0	negatív	0	pozitív
f	**növekvő**	$f(-1)=2$	**csökkenő**	$f(1)=-2$	**növekvő**

Monotonitás megállapítása a táblázat helyes kitöltése alapján. (3 pont)

c) Az *f* lokális maximumot vesz fel az $x=-1$ helyen, a lokális maximum értéke $f(-1)=2$ (1 pont)

Az *f* lokális minimumot vesz fel az $x=1$ helyen, a lokális minimum értéke $f(1)=-2$ (1 pont)

Mivel $f(-2,5)=-8,125$, a **globális minimum: -8,125** (1 pont)

Mivel $f(2,5)=8,125$, ezért a **globális maximum 8,125** (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) a) Ábrázolja függvény-transzformációk segítségével a $[-3;4]$ intervallumon az $x\mapsto x^2-2|x|-3$ hozzárendelési szabállyal megadott függvényt! **(6 pont)**

b) Legyen az *f*, a *g* és a *h* függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési szabályuk: $f(x)=x^2-2x-3$; $g(x)=x-3$, $h(x)=|x|$.

Képezzünk egyszeresen összetett függvényeket a szokásos módon. Például: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\left(x^2-2x-3\right)-3=x^2-2x-6$

Készítse el –a fenti példának megfelelően- az *f*, *g* és *h* függvényekből pontosan két különböző felhasználásával képezhető egyszeresen összetett függvényeket! Sorolja fel valamennyit! **(6 pont)**

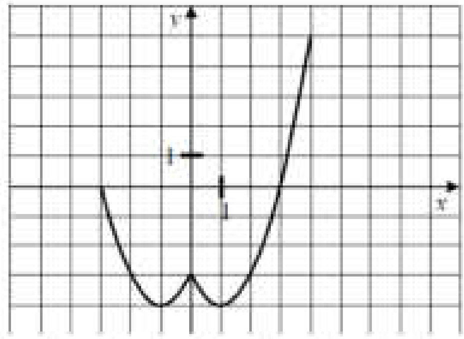
c) Keressen példát olyan *p* és *t*, a valós számok halmazán értelmezett függvényre, amelyre $(p\circ t)(x)=(t\circ p)(x)$!

Adja meg a *p* és *t* függvény hozzárendelési szabályát! **(4 pont)**

Megoldás:

a) $x \mapsto \begin{cases} x^2-2x-3, \text{ ha } x \geq 0 \\ x^2+2x-3, \text{ ha } x<0 \end{cases}$ (1 pont)

$x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2-4, \text{ ha } x \geq 0 \\ (x+1)^2-4, \text{ ha } x<0 \end{cases}$ (1 pont)



A grafikon két összetevőjének ábrázolása transzformációval (2 pont)

A függvény képe a megadott intervallumon (2 pont)

b) Összetett függvényhez a 3 függvény közül 2-t kell kiválasztani a sorrendre való tekintettel, ezt 6-féleképpen tehetjük meg. (1 pont)

A függvények: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2-2x-3)-3 = \boldsymbol{x^2-2x-6}$ (megadva)

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-3)^2-2(x-3)-3 = \boldsymbol{x^2-8x+12}$ (1 pont)

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \boldsymbol{|x^2-2x-3|}$ (1 pont)

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = |x^2|-2|x|-3 = \boldsymbol{x^2-2|x|-3}$ (1 pont)

$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \boldsymbol{|x|-3}$ (1 pont)

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \boldsymbol{|x-3|}$ (1 pont)

c) Egy egyszerű példa: $p(x)=x+c$ és $t(x)=x-c$ (ahol c nullától különböző konstans) (1 pont)

$(p \circ t)(x) = (x+c)-c = x$ (1 pont)

$(t \circ p)(x) = (x-c)+c = x$ (1 pont)

Tehát $\boldsymbol{(p \circ t)(x) = (t \circ p)(x)}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

4) Egy arborétumban 1969 óta figyelik a fák természetes növekedését. Úgy tapasztalták, hogy a mandzsu fűzfa magasságát közelítően jól írja le az $m(t)=12-\frac{10}{t+1}$ képlet; a hegyi mamutfenyő magasságát közelítően jól írja le a következő formula: $h(t)=5\cdot\sqrt{0,4t+1}+0,4$.

Mindkét formulában t az 1969 óta eltelt időt jelöli években $(t \geq 1)$, és a magasságot méterben számolják.

a) Szemléltesse a mandzsu fűzfa és a hegyi mamutfenyő magasságának változását, olyan közös oszlopdiagram, amely a magasság értékét az 1970 és 2000 közötti időszakban 10 évenként mutatja! A diagramon tüntesse fel a számított magasságértékeket! (6 pont)

b) A mamutfenyő melyik évben érte el 10,5 méteres magasságot? (4 pont)

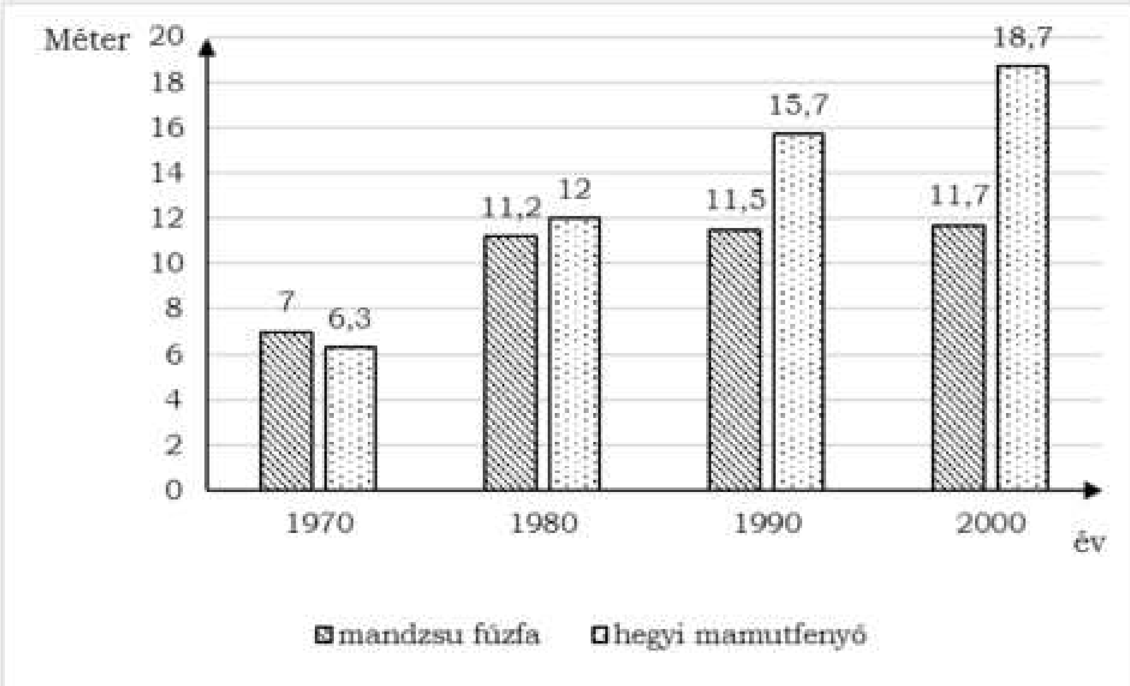
c) Indokolja, hogy nem lehet olyan fa az arborétumban, amely magasságát a $g(t)=t^3-16,5t^2+72t+60$ képlet írja le. (A magasságot centiméterben számolják, t az 1985 óta eltelt időt jelöli években, és $t \leq 21$.) (6 pont)

Megoldás:

a) Táblázatba foglaljuk a képletek által kiszámított magasságokat az eltelt évek függvényében: (2 pont)

	1970	1980	1990	2000
t	1	11	21	31
$m(t)$	7	11,2	11,5	11,7
$h(t)$	6,3	12,0	15,7	18,7

Helyes ábrázolások: (4 pont)



b) Megoldandó a $10,5 = 5 \cdot \sqrt{0,4t+1} + 0,4$ egyenlet (1 pont)

Rendezés után kapjuk, hogy $t \approx 7,7$ (2 pont)

A kívánt magasságot a mamutfenyő a 8. évben érte el, vagyis $1969 + 8 =$ **1977-ben**. (1 pont)

c) A megadott függvény monotonitását, az első derivált előjel-vizsgálatával állapítjuk meg. (1 pont)

A derivált: $g'(t) = 3t^2 - 33t + 72$ (2 pont)

A derivált értéke 0, ha $t = 3$ vagy $t = 8$ (1 pont)

A derivált mindkét nullhelyénél előjelet vált, a két nullhely közötti t értékekre a derivált negatív, ezért a $g(t)$ függvény ezen a tartományon $3 < t < 8$ szigorú monoton csökkenő. (1 pont)

A fa magassága nem csökkenhet az arborétumban, ezért a $g(t)$ függvény egyetlen fa növekedését sem írhatja le. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) a) Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ kifejezés értelmezhető! (2 pont)

b) Ábrázolja a $[-5;8]$ intervallumon értelmezett $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ függvényt! (5 pont)

c) Melyik állítás igaz és melyik hamis a fenti függvényre vonatkozóan? Válaszát írja a sor végén lévő téglalapba! (Az indoklást nem kell leírnia.)

A: Az f értékkészlete: $[0;5]$

B: Az f függvény minimumát az $x=-3$ helyen veszi fel.

C: Az f függvény szigorúan monoton nő a $[4;8]$ intervallumon.

(3 pont)

A	
B	
C	

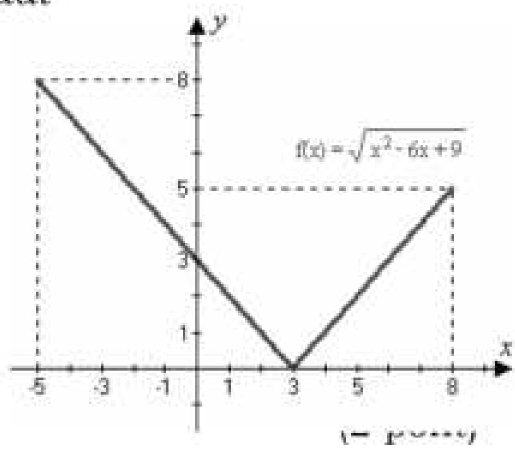
d) Határozza meg az $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$ értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 13. feladat*

b) $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$ (2 pont)

Ábra... (3 pont)



c) A: **Hamis** (1 pont)

B: **Hamis** (1 pont)

C: **Igaz** (1 pont)

d) $\int_{-3}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right]_{-3}^{3}=$ (3 pont)

$=(9-27+27)-(-9-27-27)=$ (2 pont)

$=\mathbf{72}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Adott az f függvény: $f:]-1;6[\to\mathbb{R};\ f(x)=-4x^3+192x$

a) Határozza meg f zérushelyeit és elemezze az f függvényt monotonitás szempontjából! (7 pont)

Jelölje c az f értelmezési tartományának egy pozitív elemét

b) Határozza meg c értékét úgy, hogy az x tengely $[0;c]$ szakasza, az $x-c=0$ egyenletű egyenes és az f grafikonja által közbezárt síkidom területe 704 területegységnyi legyen! (9 pont)

Megoldás:

a) A $-4x\left(x^2-48\right)=0$ egyenlet $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen megoldása a **0**.

(2 pont)

f deriváltjának hozzárendelési szabálya: $f'(x)=-12x^2+192$ (1 pont)

A deriváltfüggvény $]-1;6[$ intervallumba eső egyetlen zérushelye 4. (1 pont)

Itt a derivált előjelet vált, mégpedig pozitívból negatívba (1 pont)

Az f függvény tehát monoton növekszik a $]-1;4]$ intervallumon és monoton csökken a $[4;6[$ intervallumon. (2 pont)

b) A $[0;c]$ intervallumon $f(x)\ge 0$ (1 pont)

ezért $\int_{0}^{c}\left(-4x^3+192x\right)dx=704$ egyenletet kell megoldani a $[0;6[$ intervallumon

(2 pont)

$$\int_0^c \left(-4x^3+192x\right)dx=\left[-x^4+96x^2\right]_0^c$$ (2 pont)

$\left[-x^4+96x^2\right]_0^c=-c^4+96c^2$ (1 pont)

$-c^4+96c^2=704$

$c^4-96c^2+704=0$ (1 pont)

Megoldóképlettel: $c^2=8$ vagy $c^2=88$ (1 pont)

Az értelmezési tartományban az egyetlen pozitív megoldás: $\boldsymbol{c}=\sqrt{\mathbf{8}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvény lokális szélsőértékhelye!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! (11 pont)

b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)

Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)

Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{k}=\mathbf{-6}$ (1 pont)

Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)

A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)

Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális maximuma van (1 pont)
A derivált $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális minimuma van (1 pont)

b) Mivel $g'(x)=3x^2-18x$ (1 pont)

Ebből $g''(x)=6x-18$ (1 pont)

A második derivált zérushelye $x=3$ (1 pont)
Itt a második derivált előjelet vált (1 pont)
A g függvény egyetlen inflexiós pontja az $\boldsymbol{x}=\mathbf{3}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

8) Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az f függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+5$$

b) Számítsa ki az f függvény grafikonja és az x tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 6. feladat*

b) Az f függvény zérushelyei -5 és 1 (1 pont)

Mivel f főegyütthatója pozitív, a másodfokú függvény a két zérushelye között negatív értékeket vesz fel. (1 pont)

A kérdéses terület a függvény két zérushely közötti integráljának -1-szerese (1 pont)

$$T = -\int_{-5}^{-1}\left(x^2+6x+5\right)dx = -\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right]_{-5}^{-1}$$ (2 pont)

behelyettesítés után, (1 pont)

a keresett terület nagysága $\mathbf{\frac{32}{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (A, B) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az A és a B pont koordinátáit! (6 pont)

b) Írja fel az ABC háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit! (4 pont)

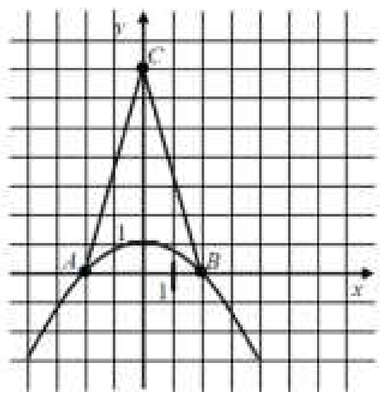
c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 8. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 8. feladat*

c) Az ABC háromszög területe: $\frac{AB\cdot m_c}{2}=\frac{4\cdot 7}{2}=14$ (1 pont)



A parabola két részre osztja a háromszöget.

A kisebbik rész területének fele a szimmetria miatt:

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx=\frac{4}{3}$$ (2 pont)

A háromszögnek parabolaív alá eső területe: $\frac{8}{3}$ (területegység) (1 pont)

A háromszögnek a parabolaív felé eső területe: $14-\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{34}{3}}$ **(te)** (1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Adott f és g függvény.

$$f:\quad D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\frac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}\quad x\mapsto(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\cdot\sin 2x$$

a) Igazolja, hogy az így definiált f függvény konstans! (3 pont)

$$g:\quad D_g=[-7;7]\quad x\mapsto x^2-6|x|$$

b) Számítsa ki g függvény zérushelyeit! (3 pont)

c) Adja meg g függvény értékkészletét! (6 pont)

Megoldás:

a) Az értelmezési tartományon minden x esetén

$f(x)=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)\cdot\sin 2x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\cdot\sin 2x=$ (1 pont)

$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}\cdot 2\sin x\cos x=$ (1 pont)

$=\mathbf{2}$ (1 pont)

b) $g(x)=\begin{cases} x^2-6x=x(x-6) \\ x^2+6x=x(x+6)\end{cases}$, ha $\begin{matrix}(7\geq)x\geq 0 \\ (-7\leq)x\leq 0\end{matrix}$ (2 pont)

ezért a g függvénynek három zérushelye van: **-6; 0; 6** (1 pont)

c) A $g(x)$ kifejezést átalakíthatjuk:

$g(x)=\begin{cases} x^2-6x=(x-3)^2-9 \\ x^2+6x=(x+3)^2-9\end{cases}$, ha $\begin{matrix}0\leq x(\leq 7) \\ (-7\leq)x\leq 0\end{matrix}$ (2 pont)

innen következik, hogy

a legkisebb függvényérték $g(3)=g(-3)=-9$ (1 pont)

a legnagyobb függvényérték $g(7)=g(-7)=7$ (1 pont)

A g (folytonos) függvény értékkészlete: $\boldsymbol{R_g}=[\mathbf{-9;7}]$ (2 pont)

Összesen: 12 pont

11) Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám és $x\in\mathbb{R}$.

a) Igazolja, hogy $\int_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$! **(6 pont)**

b) Mely pozitív a számokra teljesül, hogy $\int_0^a f(x)\,dx\geq 0$? **(4 pont)**

c) Az x mely pozitív valós értéke lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvények lokális (helyi) minimuma? **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az f függvény integrálható.

$\int_0^a\left(-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a\right)dx=\left[-\frac{x^4}{a}+\frac{x^3}{a}+\frac{x^2}{a}-ax\right]_0^a=$ (4 pont)

$=-\frac{a^4}{a}+\frac{a^3}{a}+\frac{a^2}{a}-a^2=$ (1 pont)

$=\boldsymbol{-a^3+a}$ (1 pont)

b) Megoldandó (az $a\in\mathbb{R}^+$ feltétel mellett) a

$-a^3+a\geq 0$ egyenlőtlenség (1 pont)

$(a+1)\cdot a\cdot(1-0)\geq 0$ (1 pont)

Mivel $a>0$, így az első két tényező pozitív, ezért $1-a\geq 0$ (1 pont)

Az a lehetséges értékeinek figyelembe vételével: $\mathbf{0<\boldsymbol{a}\leq 1}$ (1 pont)

c) A nyílt intervallumon értelmezett $(x\in\mathbb{R})$ g függvény differenciálható.

$g'(x)=-3x+1$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely keresése: $-3x^2+1=0$ (1 pont)

A lehetséges szélsőértékhely: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\in Df)$ (1 pont)

$g''(x)=-6x$ (1 pont)

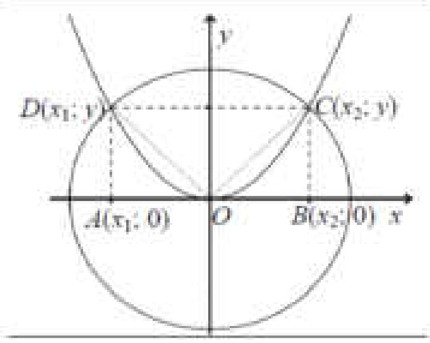
$g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{6}{\sqrt{3}}<0$ (1 pont)

Tehát az $\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$ lokális minimumhely. (1 pont)

Összesen: 16 pont

12) Az $x^2=2y$ egyenletű parabola az $x^2+y^2\le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

Megoldás:



Az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (O) (2 pont)

A metszéspontok meghatározása:

$$\left.\begin{matrix}2y=x^2\\ x^2+y^2=8\end{matrix}\right\}\Rightarrow y^2+2y-8=0 y_1=2\Rightarrow \quad y_2=-4$$ (3 pont)

amelyek közül az $y=2$ a feladatnak megfelelő

A CD húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek a középponti szöge $\frac{\pi}{2}(=90^\circ)$, mert (1 pont)

az OD és OC is egy-egy négyzet átlója (1 pont)

így a területe: $$T_{\text{körszelet}}=\frac{1}{2}r^2(\alpha-\sin\alpha)=$$ $$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi-4$$ (2 pont)

A parabolából a CD húr által levágott parabolaszelet területe:

$$T_{\text{parabolaszelet}}=T_{ABCD}-\int_{x_1}^{x_2}\frac{x^2}{2}dx=4\cdot 2-\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}=$$

$$=8-\left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2}=8-\left[\frac{4}{3}-\left(-\frac{4}{3}\right)\right]=\frac{16}{3}$$ (5 pont)

A konvex rész területe:

$$T=T_{\text{körszelet}}+T_{\text{parabolaszelet}}=2\pi-4+\frac{16}{3}=\mathbf{2\pi+\frac{4}{3}}$$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Egy kozmetikumokat gyártó vállalkozás nagy tételben gyárt egyfajta krémet. A termelés havi mennyisége (x mennyisége) 100 és 700 kg közé esik, amelyet egy megállapodás alapján a gyártás hónapjában el is adnak egy nagykereskedőnek. A megállapodás azt is tartalmazza, hogy egy kilogramm krém eladási ára: $(36-0,03x)$ euró. A krémgyártással összefüggő havi kiadás (költség) is függ a havonta eladott mennyiségtől. A krémgyártással összefüggő havi kiadást (költséget) a $0,0001x^3-30,12x+13000$ összefüggés adja meg, szintén euróban.

a) **Számítsa ki, hogy hány kilogramm krém eladása esetén lesz az eladásból származó havi bevétel a legnagyobb! Mekkora a legnagyobb havi bevétel? (6 pont)**

b) **Adja meg a krémgyártással elérhető legnagyobb havi nyereséget! Hány kilogramm krém értékesítése esetén valósul ez meg? (nyereség = bevétel – kiadás) (10 pont)**

Megoldás:

a) Az eladásból származó havi bevétel: $x(36-0{,}03x)$ euró. (1 pont)

Az $x \mapsto -0{,}03x^2+36x \quad (x \in \mathbb{R})$, maximummal rendelkező másodfokú függvény. (1 pont)

A függvény zérushelyei 0 és 1200, (1 pont)

ezért a függvény maximumhelye 600. (1 pont)

Ez az érték a feltételek szerinti intervallumba tartozik. (1 pont)

A legnagyobb bevételt tehát 600 kg termék értékesítése esetén érik el, a legnagyobb bevétel 10 800 euró. (1 pont)

b) A havi nyereség a havi bevétel és a havi kiadás különbségével egyenlő. A havi nyereséget az $x \mapsto -0{,}03x^2+36x-\left(0{,}0001x^3-30{,}12x+13000\right) \quad (100<x<700)$ függvény adja meg (1 pont)

A nyereséget leíró függvény:

$x \mapsto -0{,}0001x^3-0{,}03x^2+66{,}12x-13000 \quad (100<x<700)$ (1 pont)

Ez a függvény deriválható, és deriváltja az

$x \mapsto -0{,}0003x^2-0{,}06x+66{,}12 \quad (100<x<700)$ függvény (1 pont)

A $-0{,}0003x^2-0{,}06x+66{,}12=0$ egyenletnek $\left(x^2+200x-220400=0\right)$ egy negatív $(x_1=-580)$ és egy pozitív $(x_2=380)$ valós gyöke van (1 pont)

A deriváltfüggvény a $]100;380[$ intervallumon pozitív (1 pont)

az $]380;700[$ intervallumon negatív (1 pont)

tehát a nyereségfüggvény 380-ig szigorúan nő, majd szigorúan csökken (1 pont)

A vizsgált függvénynek tehát egy abszolút maximumhelye van és az a 380 (1 pont)

A legnagyobb függvényérték 2306,4 (1 pont)

A legnagyobb havi nyereség tehát 380 kg termék eladása esetén keletkezik, értéke 2306,4 euró (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) A nyomda egy plakátot 14400 példányban állít elő. A költségeket csak a nyomtatáshoz felhasznált nyomólemezek (klisék) darabszámának változtatásával tudják befolyásolni. Egy nyomólemez 2500 Ft-ba kerül, és a nyomólemezek mindegyikével óránként 100 plakát készül. A nyomólemezek árán felül, a lemezek számától függetlenül, minden nyomtatásra fordított munkaóra további 40000 Ft költséget jelent a nyomdának. A ráfordított idő és az erre az időre jutó költség egyenesen arányos.

a) **Mennyi a nyomólemezek árának és a nyomtatásra fordított munkaórák miatt fellépő költségek összege, ha a 14400 plakát kinyomtatásához 16 nyomólemezt használnak? (4 pont)**

b) A 14400 plakát kinyomtatását a nyomda a legkisebb költséggel akarja megoldani. Hány nyomólemezt kell ekkor használnia? Mennyi ebben az esetben a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó költségek összege? (12 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 8. feladat*

b) Ha a nyomda x darab nyomólemezt használ, akkor ennek a költsége $2500x$. (1 pont)

Az x darab lemezzel óránként $100x$ darab plakát készül el, ezért a 14400 darab kinyomtatása $\frac{14400}{100x}=\frac{144}{x}$ órát vesz igénybe, (1 pont)

és ez további $\frac{5,76\cdot10^6}{x}$ forint. (1 pont)

A két költség összege $K(x)=2500x+\frac{5,76\cdot10^6}{x}$, ahol x pozitív egész. (1 pont)

Tekintsük a pozitív valós számok halmazán a K utasítása szerint értelmezett függvényt. (1 pont)

Az így megadott K függvény minimumát keressük. A K függvény deriválható és minden $0<x$ esetén $K'(x)=2500-\frac{5,76\cdot10^6}{x^2}$. (1 pont)

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy $K'(x)=0$ (1 pont)

$2500-\frac{5,76\cdot10^6}{x^2}=0$, innen $x^2=2304$ (1 pont)

$x=48$, mert $x>0$ (1 pont)

Annak igazolása, hogy az $x=48$ (abszolút) minimumhely: $\left(K''(x)=\frac{1,152\cdot10^7}{x^3}\right)$ (1 pont)

Azaz **48 nyomólemez alkalmazása esetén lesz minimális a költség.** (1 pont)

48 darab nyomólemez alkalmazása esetén a nyomólemezekre és a ráfordított munkaidőre jutó **költségek összege: $K(48)=240000$ Ft** (1 pont)

Összesen: 16 pont

15) a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:

***A*: a dobott számok összege prím**

***B*: a dobott számok összege osztható 3-mal (6 pont)**

b) Az 1,2,3,4,5,6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (5 pont)

c) Az *ABCD* négyzet csúcsai: $A(0;0)$, $B\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

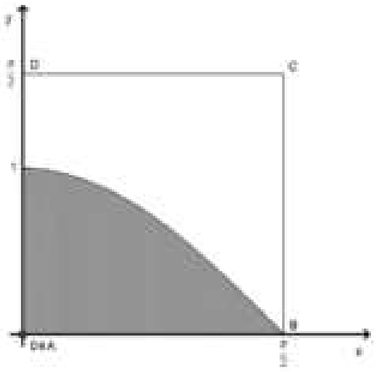
Véletlenszerűen kiválasztjuk a négyzet egy belső pontját. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a koordinátatengelyek és az $f:\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ függvény grafikonja által határolt tartomány egyik pontja? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 14. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 14. feladat*

c) A négyzet és az *f* függvény grafikonjának felvétele közelítő pontossággal (1 pont)



A négyzet területe $\frac{\pi^2}{4}$ (1 pont)

A koordinátatengelyek és az *f* függvény grafikonja által határolt tartomány területe: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx =$ (1 pont)

$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ (1 pont)

A valószínűség kiszámításának geometriai modelljét alkalmazva, a keresett valószínűség: $P = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2} \approx \mathbf{0{,}405}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

16) Legyen *p* valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett *f* függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$.

a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)\,dx$ határozott integrált, ha $p = 3$. (4 pont)

b) Határozza meg *p* értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az *f* függvénynek! (3 pont)

c) Határozza meg *p* értékét úgy, hogy az *f* függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen! (7 pont)

Megoldás:

a) Ha $p = 3$, akkor $f(x) = -3x^3 + 9x - 6$ (1 pont)

$\int_0^2 (-3x^3 + 9x - 6)\,dx = \left[-0{,}75x^4 + 4{,}5x^2 - 6x\right]_0^2 =$ (2 pont)

$= \mathbf{-6}$ (1 pont)

b) $-3 + (p-3) + p^2 - 6 = 0$ (1 pont)

Rendezve: $p^2 + p - 12 = 0$ (1 pont)

Ennek a megoldásából adódik, hogy $\mathbf{p = 3}$ vagy $\mathbf{p = -4}$ esetén lesz a megadott függvénynek zérushelye az **1**. (1 pont)

c) Deriváltfüggvény: $f'(x) = -9x^2 + 2(p-3)x + p^2$. (2 pont)

$x = 1$-hez tartozó helyettesítési érték: $p^2 + 2p - 15$. (1 pont)

$p^2 + 2p - 15 > 0$ egyenlőtlenség megoldható. (1 pont)

$p^2 + 2p - 15 = 0$ egyenlet megoldásai 3 és -5. (1 pont)

mivel $p^2 + 2p - 15 > 0$ bal oldalának főegyütthatója pozitív. (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség teljesül, ha $\mathbf{p < -5}$ vagy $\mathbf{p > 3}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

17) a) **Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;7]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt!** **(4 pont)**

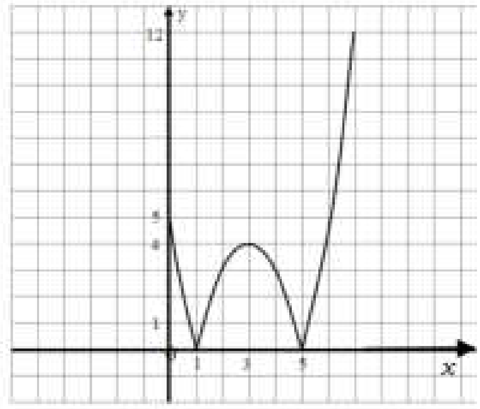
b) **Adja meg az f függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

c) **A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $\left|x^2-6x+5\right|=p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon?** **(8 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|=\left|(x-3)^2-4\right|$ (1 pont)

Helyes ábra. (3 pont)



b) f értékkészlete: $[0;12]$ (2 pont)

c) A lehetséges megoldások a grafikonról leolvashatók (1 pont)

Ha $p<0$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Ha $p=0$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $0<p<4$, **akkor 4 megoldás van** (1 pont)

Ha $p=4$, **akkor 3 megoldás van** (1 pont)

Ha $4<p\le 5$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $5<p\le 12$, **akkor 1 megoldás van** (1 pont)

Ha $12<p$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Összesen: 14 pont

18) **Egy üzemben olyan forgáshenger alakú konzervdoboz gyártását szeretnék elkezdeni, amelynek térfogata 1000 cm³. A doboz aljának és tetejének anyagköltsége $0{,}2\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Ft}$, míg oldalának anyagköltsége $0{,}1\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Ft}$.**

a) **Mekkorák legyenek a konzervdoboz méretei (az alapkör sugara és a doboz magassága), ha a doboz anyagköltségét minimalizálni akarják? Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! Számítsa ki a minimális anyagköltséget is egész forintra kerekítve!** **(13 pont)**

A megtöltött konzervdobozokat tizenkettesével csomagolták kartondobozokba. Egy ellenőrzés alkalmával 10 ilyen kartondoboz tartalmát megvizsgálták. Minden kartondoboz esetén feljegyezték, hogy a benne található 12 konzerv között hány olyat találtak, amelyben a töltősúly nem érte el az előírt minimális értéket. Az ellenőrök a 10 kartondobozban rendre 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0, 1, 3, 0 ilyen konzervet találtak, s ezeket a konzerveket selejtesnek minősítették.

b) **Határozza meg a kartondobozonkénti selejtes konzervek számának átlagát és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését!** **(3 pont)**

Megoldás:

a) Ha r a doboz alapkörének sugara m pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor $V=r^2\pi m$ ahonnan $m=\dfrac{V}{r^2\pi}=\dfrac{1000}{r^2\pi}$ (1 pont)

Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége r függvényében $0{,}2\cdot 2r^2\pi$ (1 pont)

A palást anyagköltsége $0{,}1\cdot 2r\pi\cdot\dfrac{V}{r^2\pi}=\dfrac{200}{r}$ (2 pont)

A teljes anyagköltség $r>0$ esetében

$f(r)=0,4r^2\pi+\dfrac{200}{r}$ (1 pont)

Az f függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol deriváltja 0. (1 pont)

$f'(r)=0,8r\pi-\dfrac{200}{r^2}$ (2 pont)

$f'(r)=0$ ha $r\left(=\sqrt[3]{\dfrac{200}{0,8\pi}}\right)\approx 4,3$ (1 pont)

$f''(r)=0,8\pi+\dfrac{400}{r^3}>0$ ezért itt valóban minimális f értéke (1 pont)

Minimális anyagköltséghez tartozó magasság

$m=\dfrac{1000}{r^2\pi}\approx 17,2\text{ cm}$ (1 pont)

Tehát a minimális anyagköltség egész forintra kerekítve 70 Ft. (2 pont)

b) *Lásd: Statisztika 18. feladat*

Összesen: 16 pont

19) Egy teherszállító taxikat üzemeltető társaság egyik, elsősorban városi forgalomban alkalmazott kocsijának teljes működtetési költsége két részből tevődik össze:

- **az üzemeltetési költség $x\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén $400+0,8x$ Ft kilométerenként;**
- **a gépkocsivezető alkalmazása 2200 Ft óránként.**

a) Mekkora átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége? Válaszát $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$-ban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

b) A társaság emblémájának alaprajzát az f és $-f$ függvények grafikonjai által közrezárt síkidommal modellezhetjük, ahol

$$f:[0;6]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{ha } x\in[0;4]\\ \dfrac{x^2-12x+36}{2} & \text{ha } x\in\,]4;6]\end{cases}$$

Számítsa ki az embléma modelljének területét! (8 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) A tehertaxi működtetésének kilométerenkénti teljes költsége az üzemeltetésből származó $400+0,8x$ (Ft) költségből, és a vezető $\dfrac{2200}{x}$ (Ft) munkadíjából tevődik össze $x\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ átlagsebesség esetén. (1 pont)

A teljes költséget 1 kilométerre forintban az $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\ f(x)=400+0,8x+\dfrac{2200}{x}$ függvény adja meg. (1 pont)

Az f-nek csak ott lehet szélsőértéke, ahol az első deriváltja 0. (1 pont)

$f'(x)=0,8-\dfrac{2200}{x^2}$ (1 pont)

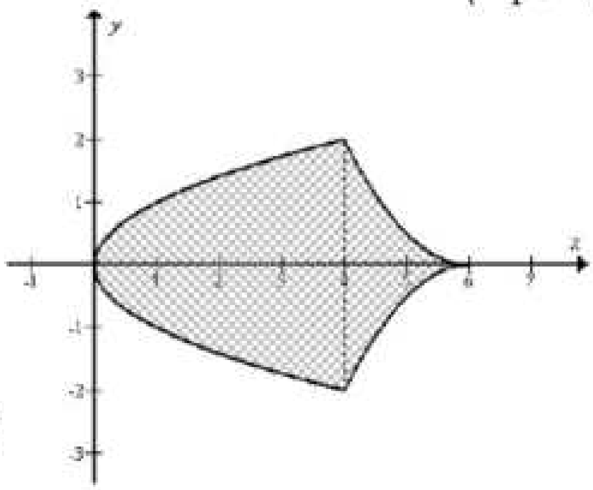
$f'(x)=0$ pontosan akkor teljesül, ha $0,8x^2=2200$. (1 pont)

Ebből $x=\sqrt{2750}\approx 52,44$. (1 pont)

Mivel $f''(x)=\dfrac{4400}{x^3}>0 \quad (x>0)$, tehát a függvény második deriváltja mindenhol, így 52,44-ben is pozitív, ezért f-nek itt valóban minimuma van. (1 pont)

Tehát (egészre kerekítve) **52 km/h** átlagsebesség esetén minimális a kocsi kilométerenkénti működtetési költsége. (1 pont)

b) Jó ábra. (1 pont)



A kérdéses terület:

$$T=2\left(\int_0^4 \sqrt{x}dx+\int_4^6 \frac{x^2-12x+36}{2}dx\right)$$ (2 pont)

A zárójelben szereplő első tag primitív függvénye: $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\right)$, (1 pont)

a második tagé pedig: $\dfrac{x^3}{6}-3x^2+18x$. (1 pont)

Alkalmazva a Newton-Leibniz tételt:

$$T=2\left(\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4+\left[\frac{x^3}{6}-3x^2+18x\right]_4^6\right)=$$ (1 pont)

$=2\left[\left(\dfrac{16}{3}-0\right)+\left(36-\dfrac{104}{3}\right)\right]=2\left(\dfrac{16}{3}+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{40}{3}$, tehát az embléma modelljének területe $\boldsymbol{\dfrac{40}{3}}$ területegység. (2 pont)

Összesen: 16 pont

20) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.

a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)

b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje t_1, a t_1 területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét t_2, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1+t_2+\ldots+t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) *Lásd: Síkgeometria 19. feladat*

b) A t_1 területű szabályos hatszög oldala az ABC háromszög AC oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1=6\dfrac{{a_1}^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$. (1 pont)

A következő szabályos hatszög t_2 területét megkaphatjuk például úgy, hogy a t_1 területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk t_1-ből.

$$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right).$$ (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim\limits_{n \to \infty}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

21) a) Deriváltfüggvényének segítségével elemezze az $f:]-2;3[\to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x$ függvényt a következő szempontok szerint: növekedés és fogyás, lokális szélsőértékek helye és értéke! (10 pont)

b) Adja meg azt a $g:]-2;3[\to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre igaz, hogy $g' = f$ (tehát az f függvény a g deriváltfüggvénye) és ezen kívül $g(2) = 0$ is teljesül! (4 pont)

Megoldás:

a) Az f deriváltfüggvénye:

$(f:]-2;3[\to \mathbb{R})$ $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$. (1 pont)

f' zérushelyei: -1 és 2. (1 pont)

Az f' másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, ezért f' értékei $x < -1$ esetén pozitívak, $-1 < x < 2$ esetén negatívak, $2 < x$ esetén pozitívak. (1 pont)

Az f függvény menete ezek alapján:

a $]-2;-1]$ intervallumon (szigorúan monoton) növekvő; (1 pont)

az $x = -1$ helyen (lokális) maximuma van, (1 pont)

amelynek értéke 3,5; (1 pont)

a $[-1;2]$ intervallumon (szigorúan monoton) csökkenő; (1 pont)

az $x = 2$ helyen (lokális) minimuma van, (1 pont)

amelynek értéke -10; (1 pont)

a $[2;3[$ intervallumon (szigorúan monoton) növekvő. (1 pont)

x	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$
f'	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
f	$\uparrow$	maximum $f(-1) = 3,5$	$\downarrow$	minimum $f(2) = -10$	$\uparrow$

b) Mivel g az f-nek egyik primitív függvénye:

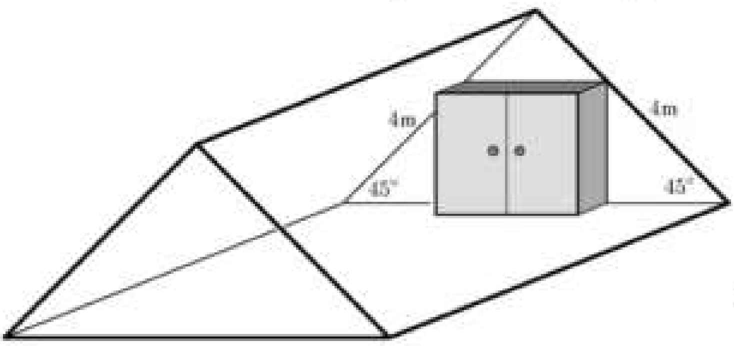
$g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + c$ $(c \in \mathbb{R})$. (1 pont)

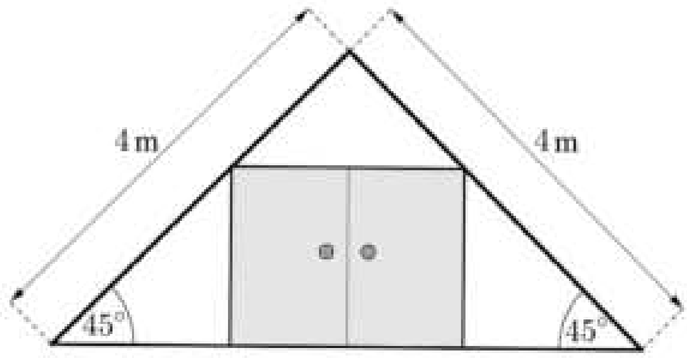
Mivel $g(2) = 4 - 4 - 12 + c = 0$, (1 pont) ezért $c = 12$, (1 pont)

és így $\boldsymbol{g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - 3x^2 + 12}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

22) Kovács úr a tetőterébe egy téglatest alakú beépített szekrényt készíttet. Két vázlatot rajzolt a terveiről az asztalosnak, és ezeken feltüntette a tetőtér megfelelő adatait is. Az első vázlat „térhatású", a második pedig elölnézetben ábrázolja a szekrényt.





A tetőtér adottságai miatt a szekrény mélységének pontosan 60 cm-nek kell lennie.

a) Mekkora legyen a szekrény vízszintes és függőleges mérete (azaz a szélessége és a magassága), ha a lehető legnagyobb térfogatú szekrényt szeretné elkészíttetni? (A magasság, a szélesség és a mélység a szekrény külső méretei, Kovács úr ezekkel számítja ki a térfogatot.) (8 pont)

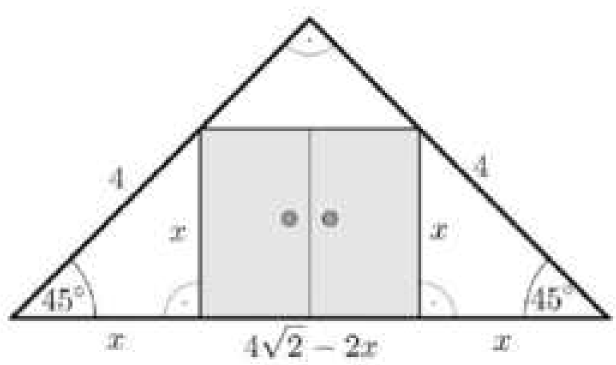
A szekrény elkészült. Az akasztós részébe Kovács úr vasárnap este 7 inget tesz be, a hét minden napjára egyet-egyet. Az ingek között van 2 fehér, 2 világoskék és 3 sárga. Reggelente nagyon siet, ezért Kovács úr csak benyúl a szekrénybe, és anélkül, hogy odanézne, véletlenszerűen kivesz egy inget.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét első három napján vagy három különböző színű vagy három egyforma színű inget választ? (Ha valamelyik nap viselt egy inget, azt utána már nem teszi vissza a szekrénybe.) (8 pont)

Megoldás:

a) Ha a szekrény magassága x méter, akkor szélessége az ábrán látható egyenlő szárú háromszögek miatt $4\sqrt{2} - 2x$. (2 pont)

A térfogata pedig: $V = 0,6x\left(4\sqrt{2} - 2x\right)$, amennyiben $0 < x < 2\sqrt{2}$. (1 pont)



Az $x \mapsto 0,6x\left(4\sqrt{2} - 2x\right)$ másodfokú függvénynek két zérushelye van, a 0 és a $2\sqrt{2}$. (1 pont)

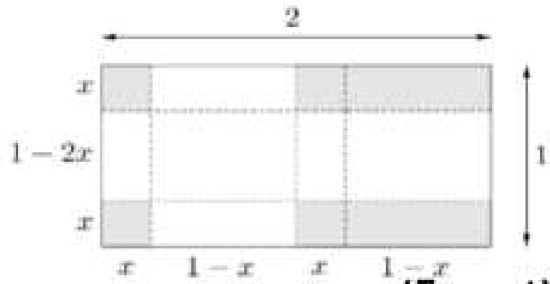
Így a negatív főegyüttható miatt ennek a függvénynek a maximuma a két zérushelye számtani közepénél, az $x = \sqrt{2}$ helyen lesz. (2 pont)

Mivel a $\sqrt{2}$ eleme a feladat értelmezési tartományának, ezért a legnagyobb térfogatú szekrény magassága körülbelül **1,41 méter**, szélessége pedig körülbelül **2,83 méter** lesz. (2 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 30. feladat, Valószínűségszámítás 30. feladat*

23) **Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbe.**

a) Igazolja, hogy ha $x\in\left]0;3\right[$, akkor $y>0$.



b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) **(5 pont)**

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Számelmélet 6. feladat*

b) (A megadott görbe az $f(x)=3x^2-x^3$, $x\in\mathbb{R}$ függvény grafikonja.)

Ekkor $f'(x)=6x-3x^2$, (1 pont)

$f'(3)=-9$, (1 pont)

$f(3)=0$. (1 pont)

Az érintő meredeksége tehát -9 (és átmegy a $(3;0)$ ponton). (1 pont)

Az érintő egyenlete: $\boldsymbol{y=-9x+27}$. (1 pont)

c) Az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbének az $x=0$ helyen van közös pontja az x tengellyel. (1 pont)

(Tudjuk, hogy ha $x\in[0;3]$, akkor $y\geq 0$, ezért) a kérdezett terület

$T=\int_0^3 f(x)dx$. (1 pont)

$\int_0^3\left(3x^2-x^3\right)dx=\left[x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^3=$ (2 pont)

$=\left(27-\frac{81}{4}\right)-(0-0)=\mathbf{6{,}75}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

24) **Egy üzemben egyforma, nagyméretű fémdobozok gyártását tervezik. A téglatest alakú doboz hálózatát egy 2 méter × 1 méteres téglalapból vágják ki az ábrán látható módon. A kivágott idom felhajtott lapjait az élek mentén összeforrasztják. (A forrasztási eljárás nem jár anyagveszteséggel.)**

a) Hogyan válasszák meg a doboz méreteit, hogy a térfogata maximális legyen? Válaszát centiméterben, egészre kerekítve adja meg! **(11 pont)**

A dobozokat egy öt karakterből álló kóddal jelölik meg. Minden kódban két számjegy és három nagybetű szerepel úgy, hogy a két számjegy nincs egymás mellett. Mindkét számjegy eleme a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaznak, a betűket pedig a 26 betűs (angol) ábécéből választják ki (például 7WA3A egy lehetséges kód).

b) Hány különböző kód lehetséges? **(5 pont)**

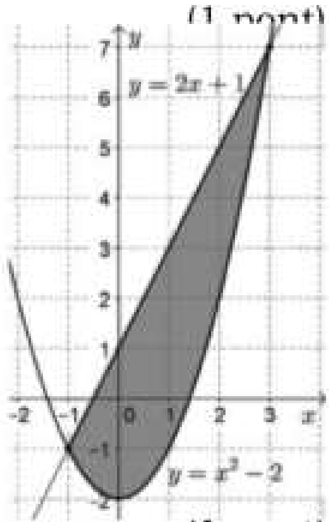
Megoldás:

a) (Az ábra jelöléseit használva) a téglatest méretei méterben:

$x, 1-x, 1-2x,$ (1 pont)

a téglatest térfogata m^3-ben: $x(1-x)(1-2x)$ (ahol $0 < x < 0{,}5$). (1 pont)

Keressük a $(V :]0; 0{,}5[\to \mathbb{R})$ $V(x) = x(1-x)(1-2x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ függvény maximumát. (1 pont)



$V'(x) = 6x^2 - 6x + 1$.

(A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy) $V'(x) = 0$.

A másodfokú egyenlet (valós) megoldásai: $\frac{3-\sqrt{3}}{6} (\approx 0{,}211)$

és

$\frac{3+\sqrt{3}}{6} (\approx 0{,}789)$.

Ez utóbbi nem eleme a V értelmezési tartományának, ezért ez nem jöhet szóba. (1 pont)

A V' függvény a $\frac{3-\sqrt{3}}{6} (\approx 0{,}211)$ helyen előjelet vált (pozitívból negatívba megy át), ezért ez a V függvénynek az egyetlen szélsőértékhelye, mégpedig a maximumhelye. (1 pont)

A maximális térfogatú doboz méretei (a kért kerekítéssel): 21,79 cm és 58 cm. (2 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 32. feladat*

Összesen: 16 pont

25) Adott az f és g függvény:

$$\boldsymbol{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ f(x) = 2x+1;}$$

$$\boldsymbol{g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ g(x) = x^2 - 2.}$$

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit! (3 pont)

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet! (7 pont)

c) Számítással igazolja, hogy a $h :]-\infty; -0{,}5[\Rightarrow \mathbb{R}; h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő! (6 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) $(2f+g)(x) = 2(2x+1) + x^2 - 2 = x^2 + 4x$ (1 pont)

$x(x+4) = 0$ (1 pont)

A $2f+g$ függvény zérushelyei $\boldsymbol{x_1 = 0}$ **és** $\boldsymbol{x_2 = -4}$. (1 pont)

b) A kérdéses területet integrálással számítjuk ki. Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldásai adják az integrálás határait. (1 pont)

A $2x+1 = x^2 - 2$ egyenlet megoldásai -1, illetve 3. (1 pont)

Mivel a $[-1; 3]$ zárt intervallumon $f(x) \geq g(x)$ (a metszéspontok első koordinátái által meghatározott intervallumon a g grafikonja egy „felfelé nyíló” parabolaív, amely „felett” van az f grafikonja), (1 pont)

ezért a kérdéses terület $\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx$. (1 pont)

$\int_{-1}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left((2x+1)-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$ (1 pont)

$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\mathbf{\frac{32}{3}(\approx 10,67)}$. (2 pont)

c) A $h(x)$ függvény a megadott intervallumon differenciálható. $h'(x)=\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{x^2-2}{2x+1}\right)'=\frac{2x(2x+1)-\left(x^2-2\right)\cdot 2}{(2x+1)^2}=$ (2 pont)

$=\frac{2(x+0,5)^2+3,5}{(2x+1)^2}$. (1 pont)

A tört számlálója és nevezője is pozitív (a h értelmezési tartományán), így a tört értéke is pozitív. (1 pont)

Tehát a függvény valóban **szigorúan monoton növekvő.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

26) Egy pénzintézet a tőle felvett H forint összegű hitel visszafizetésekor havi $p\%$-os kamattal számol $(p>0)$, ezért az adós havi törlesztőrészletét a $t_n=H\cdot\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$ képlettel számítja ki (minden hónapban ekkora összeget kell visszafizetni). A képletben $q=1+\frac{p}{100}$, az n pedig azt jelenti, hogy összesen hány hónapig fizetjük a törlesztőrészletet (ez a hitel futamideje).

a) Fogyasztási cikkek vásárlására 1,6 millió forint hitelt vettünk fel a pénzintézettől; a havi kamat 2%. Összesen hány forintot fizetünk vissza, ha 72 hónap alatt törlesztjük a felvett hitelt? Válaszát ezer forintra kerekítve adja meg! (4 pont)

b) Legkevesebb hány hónapos futamidőre vehetünk fel egy 2 millió forintos hitelt, ha legfeljebb 60 ezer forintot tudunk havonta törleszteni, és a havi kamat 2%-os? (8 pont)

c) Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ határértékét, ha $q=1,02$ és $H=2000000$! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 23. feladat*

b) *Lásd: Sorozatok 23. feladat*

c) A megadott számokkal $t_n=H\cdot(q-1)\cdot\frac{q^n}{q^n-1}=40000\cdot\frac{1,02^n}{1,02^n-1}$ (1 pont)

Egyszerűsítés után: $t_n = 40000 \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1,02^n}}$ (1 pont)

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1,02^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1,02}\right)^n = 0$, (1 pont)

ezért $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 40000 \cdot \dfrac{1}{1-0} = \mathbf{40\,000}$**.** (1 pont)

Összesen: 16 pont

27) Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték (lásd az ábrát). A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 2,6y = 0$.

a) Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg! (8 pont)

A Zöld Iskolából 8, a Piros Iskolából 10 tanuló versenyzett a bajnokságon. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszott, az ugyanabba az iskolába járó tanulók is játszottak egymással. A verseny végén kiderült, hogy a Piros Iskola tanulói összesen kétszer annyi mérőzést nyertek meg, mint a Zöld Iskola tanulói. (Teniszben döntetlen nincs.)

b) A Zöld Iskola versenyzői összesen hány olyan mérkőzést nyertek meg, amelyet a Piros Iskola valamelyik teniszezőjével játszottak? (7 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) Az $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola a $(-2;\ 0)$, illetve a $(2;\ 0)$ pontban metszi az abszcisszatengelyt (és az emblémát határoló parabolaív az x tengely fölött van). (1 pont)

A parabolaszelet területe: $\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx =$ (1 pont)

$= \left[4x - \dfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$ (1 pont)

$\left(= 8 - \dfrac{8}{3} - \left(-8 + \dfrac{8}{3}\right)\right) = \dfrac{32}{3}$. (1 pont)

A kör egyenletét átalakítva: $x^2 + (y-1,3)^2 = 1,3^2$, (1 pont)

ebből a kör sugara 1,3, területe pedig $1,69\pi\ (\approx 5,31)$ (1 pont)

A kör és a parabolaszelet területének aránya: $1,69\pi : \dfrac{32}{3}\ (\approx 0,4977)$ (1 pont)

A kör területe (a kért kerekítéssel) **a parabolaszelet területének 50%-a.**

(1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 35. feladat*

Összesen: 14 pont

28) Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$–ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek! (9 pont)

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9;5[$ intervallumon! (4 pont)

c) A Newton-Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)dx$ határozott integrál értékét! (3 pont)

Megoldás:

a) (Az f egy nyílt intervallumon deriválható függvény, ezért) az f függvénynek ott lehet szélsőérték-helye, ahol az első deriváltfüggvényének zérushelye van.

(1 pont)

$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 - 540x$ (1 pont)

Mivel x kiemelhető, ezért az egyik zérushelye a 0, (1 pont)

további két zérushelyét a $4x^2 + 24x - 540 = 0$ egyenlet gyökei adják: 9 és –15.

(1pont)

A (harmadfokú) deriváltfüggvény –15-ben és 9-ben negatívból pozitívba megy át, ezért ezek lokális minimumhelyei, 0-ban pedig pozitívból negatívba megy át, ezért ez lokális maximumhelye a függvénynek. (2 pont)

Mivel $f(-15) = -36850 < f(9) = -9202$, (1 pont)

továbbá a $]-\infty;-15[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $]9;+\infty[$ intervallumon pedig szigorúan monoton növekedő az f függvény, ezért a –15 **valóban abszolút minimumhelye** f-nek. (2 pont)

b) $f''(x) = 12x^2 48x - 540 \ (x \in \mathbb{R})$ (1 pont)

Az $f''(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van: –9 és 5. (1 pont)

Az f” grafikonja egy „felfelé nyíló parabola”, ezért a két zérushely között az f'' negatív. (1 pont)

Mivel az f'' függvény a $]-9;5[$ intervallumon negatív, ezért az f függvény itt **konkáv**. (1 pont)

c) $\int_0^5 f(x)dx = \left[\frac{x^5}{5} + 2x^4 - 90x^3 + 275x\right]_0^5$ (1 pont)

$= (625 + 1250 - 11250 + 1375) - 0 =$ (1 pont)

= -8000. (1 pont)

Összesen: 16 pont

29) a) Egy számtani sorozat differenciája 1,6. A sorozat első, harmadik és hetedik tagját (az adott sorrendben) tekinthetjük egy mértani sorozat első három tagjának is. Határozza meg ezt a három számot! (6 pont)

Tekintsük a következő állítást: *Ha az $\{a_n\}$ számsorozat konvergens, akkor az $\{a_n\}$ sorozat értékkészlete véges számhalmaz.* (Véges halmaz: elemeinek száma megadható egy természetes számmal.)

a) Döntse el, hogy az állítás igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!(3 pont)

b) Fogalmazza meg az állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 25. feladat*

b) **Az állítás hamis**. (1 pont)

Például az $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ számsorozat (1 pont)

konvergens, az értékkészlete azonban végtelen szám-halmaz. (1 pont)

c) Megfordítás: **Ha az $\{a_n\}$ számsorozat értékkészlete véges számhalmaz, akkor az $\{a_n\}$ sorozat konvergens.** (1 pont)

A megfordított **állítás hamis**. (1 pont)

Például a $\{(-1)^n\}$ sorozat (1 pont)

értékkészlete véges $\{(-1;1)\}$, de a sorozat nem konvergens. (1 pont)

Összesen 13 pont

30) Adott az *f*, a *g* és a *h* függvény:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-1;\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x+2;\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=12-x^2.$

a) Legyen a *k* összetett függvény belső függvénye az *f* és külső függvénye a *h* (vagyis $k(x)=h(f(x))$ minden *x* valós szám esetén). Igazolja, hogy $k(x)=11+2^{x+1}-4^x$. (3 pont)

b) Oldja meg az $f(g(x))<g(f(x))$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán! (7 pont)

c) Mekkora a *h* és az $x\mapsto -4\ (x\in\mathbb{R})$ függvények görbéi által közbezárt (korlátos) terület? (6 pont)

Megoldás:

a) $k(x)=12-(2^x-1)^2=$ (1 pont)

$(=12-(2^{2x}-2\cdot 2^x+1))=12-(4^x-2^{x+1}+1)$ (1 pont)

A zárójel felbontása után $k(x)=11+2^{x+1}-4^x$ adódik, tehát **igaz az állítás**.

(1 pont)

b) Megoldandó a $2^{3x+2}-1<3(2^x-1)+2$ egyenlőtlenség a valós számok halmazán.

(2 pont)

$4\cdot 2^{3x}-1<3\cdot 2^x-1$ (1 pont)

$2^x(4\cdot 2^{2x}-3)<0$ (1 pont)

Mivel minden valós szám esetén $2^x>0$, ezért az egyenlőtlenség ekvivalens a egyenlőtlenséggel. (1 pont)

A 4-es alapú exponenciális/logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért

(1 pont)

$x<\log_4 0,75(=-1+\log_4 3\approx -0,2075)$ (1 pont)

c) A két görbe közös pontjainak első koordinátáját a $12-x^2=-4$ egyenlet megoldásai adják: (1 pont)

-4 és 4 (1 pont)

(Mivel a $[-4;\ 4]$ intervallumon a h függvény grafikonja az $x \mapsto -4$ függvény grafikonja fölött helyezkedik el, ezért) a kérdezett terület:

$$\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\left[16x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4}=$$ (2 pont)

$$=\left(64-\frac{64}{3}\right)-\left(-64-\left(-\frac{64}{3}\right)\right)=\frac{128}{3}-\left(-\frac{128}{3}\right)=\mathbf{\frac{256}{3}}.$$ (2 pont)

Összesen 16 pont

31) A repülőgépek üzemanyag-fogyasztását számos tényező befolyásolja. Egy leegyszerűsített matematikai modell szerint (a vizsgálatba bevont repülőgépek esetében) az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömegét az $f(x)=\frac{1}{20}\left(x^2-1800x+950000\right)$ összefüggés adja meg. Ebben az összefüggésben x a repülési átlagsebesség km/h-ban $(x>0)$, $f(x)$ pedig a felhasznált üzemanyag tömege kg-ban.

a) A modell alapján hány km/h átlagsebesség esetén lesz minimális az egy óra repülés alatt felhasznált üzemanyag tömege? Mekkora ez a tömeg? (5 pont)

Egy repülőgép Londonból New Yorkba repül. A repülési távolság 5580 km.

b) Igazolja, hogy v km/h átlagsebesség esetén a repülőgép üzemanyag-felhasználása ezen a távolságon (a modell szerint) $279v-502200+\frac{265050000}{v}$ kg lesz! $(v>0)$ (3 pont)

A vizsgálatba bevont, Londontól New Yorkig közlekedő repülőgépek v átlagsebességére teljesül, hogy 800 km/h $\le v \le$ 1100 km/h.

c) A megadott tartományban melyik átlagsebesség esetén a legnagyobb, és melyik esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás? (5 pont)

Megoldás:

a) $f(x)=\frac{1}{20}\left((x-900)^2-810000+950000\right)=$ (2 pont)

$=\frac{1}{20}(x-900)^2+7000$ (1 pont)

(Mivel $(x-900)^2 \ge 0$, és egyenlőség pontosan akkor van, ha $x=900$, ezért) az óránkénti üzemanyag-fogyasztás 900 km/h átlagsebesség esetén minimális, (1 pont)

és ez a minimum **7000 kg** óránként. (1 pont)

b) A repülési idő órában: $t=\frac{5580}{v}$ (1 pont)

Az út során elfogyasztott üzemanyag kg-ban:

$t\cdot f(v)=\frac{5580}{v}\cdot\frac{1}{20}\left(v^2-1800v+950000\right)=$ (1 pont)

$=279v-502200+\frac{265050000}{v}$. (1 pont)

c) A pozitív valós számok halmazán értelmezett $g(v) = 279v - 502200 + \frac{265050000}{v}$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. (1 pont)

$g'(v) = 279 - \frac{265050000}{v^2}$ (1 pont)

$g'(v) = 0$, ha $v = 100\sqrt{95}$ $(\approx 974{,}68)$ (mert $v > 0$) (1 pont)

A deriváltfüggvény értékei $v < 100\sqrt{95}$ esetén negatívak, $v > 100\sqrt{95}$ esetén pedig pozitívak. Ezért a $100\sqrt{95}$ a g függvénynek abszolút minimumhelye. (1pont)

(A deriváltfüggvény előjele alapján tehát) a g függvény a $\left[800; 100\sqrt{95}\right]$ zárt intervallumon szigorúan csökkenő, a $\left[100\sqrt{95}; 1100\right]$ zárt intervallumon pedig szigorúan növekvő, ezért a g függvény [800; 1100] intervallumra való leszűkítése a maximumát vagy 800-nál vagy 1100-nál veszi fel. (1 pont)

$g(800) = 52312{,}5$

$g(1100) = 45654{,}5$ (1 pont)

Tehát a modell szerint 800 km/h átlagsebesség esetén a legnagyobb, (1pont)

és $\left(100\sqrt{95} \approx\right)$ **975 km/h** átlagsebesség esetén a legkisebb az egy útra jutó üzemanyag-felhasználás. (1 pont)

Összesen 16 pont

32) Adott a g függvény: $g(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Adjon meg egy olyan (nem nulla hosszúságú) intervallumot, amelyen a g mindegyik helyettesítési értéke negatív! (3 pont)

b) Határozza meg a c lehetséges értékeit úgy, hogy $\int_0^c g(x)\,dx = 0$ teljesüljön! (4 pont)

c) Határozza meg az $f :]-4; -1[\mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x + 20$ függvény minimumhelyét és a minimális függvényértéket! (7 pont)

Megoldás:

a) $g(x) = \frac{1}{6}x^2(3-2x)$ (1 pont)

A szorzatban csak a $3-2x$ tényező lehet negatív (ha $x > 1{,}5$). (1 pont)

Egy megfelelő intervallum, az $]1{,}5; \infty[$ **valamely részhalmazá**nak megadása. (1 pont)

b) $\int_0^c g(x)\,dx = \left[-\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6}\right]_0^c =$ (1 pont)

$= -\frac{c^4}{12} + \frac{c^3}{6} - \frac{c^4}{12} + \frac{c^3}{6} = 0 \Rightarrow \mathbf{c = 0}$, (2 pont)

vagy $\mathbf{c = 2}$. (1 pont)

c) (Csak ott lehet szélsőértékhelye f-nek, ahol f'-nek zérushelye van:)

$f'(x) = -x^2 + x + 12 \; (-4 < x < -1)$ (1 pont)

$-x^2 + x + 12 = 0$ (1 pont)

Az egyenlet valós gyökei -3 és 4, (1 pont)

de a 4 az értelmezési tartományon kívül esik. (1 pont)

Az f' $x < -3$ esetén negatív, $x > -3$ esetén pedig pozitív, (1 pont)

tehát $\boldsymbol{x = -3}$ (abszolút) minimumhely. (1 pont)

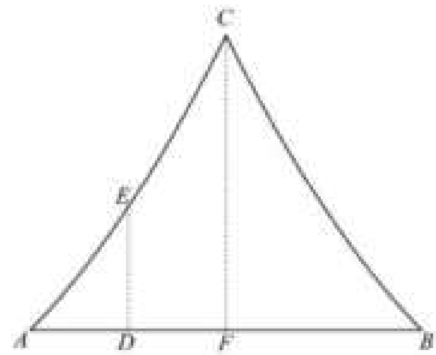
A minimum értéke $\boldsymbol{f(-3) = -2,5}$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

33) Egy egyesületi összejövetel társaságához 5 nő és 4 férfi csatlakozott, így a nők aránya a korábbi 25%-ról 36%-ra nőtt.

a) Hány főből állt az eredeti társaság? (5 pont)

Az ábrán az egyesület székházának függőleges síkú homlokzata látható, amelyet az AC és BC egybevágó parabolaívek határolnak. A parabolák tengelye egy-egy függőleges egyenes, ezek az AB szakasz felezőmerőlegesére szimmetrikusan helyezkednek el. A homlokzat szélessége $AB = 8$ méter, magassága $FC = 6$ méter, az AF szakasz D felezőpontjában mért tetőmagasság pedig $DE = 2,5$ méter.



b) Hány négyzetméter a homlokzat területe? (11 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: statisztika 13. feladat*

b) Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordináta-rendszert, amelyben legyen $A(0;0)$ és $F(4;0)$. Ekkor $C(4;6)$, $D(2;0)$ és $E(2;2,5)$ (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük). Az A, E, C pontokon átmenő, az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola egyenletét keressük $y = ax^2 + bx + c$ alakban. (1 pont)

A parabolán rajta van az A pont, tehát $c = 0$, (1 pont)

rajta van a C pont, ezért $6 = 16a + 4b$, (1 pont)

és rajta van az E pont is, ezért $2,5 = 4a + 2b$. (1 pont)

A $\left.\begin{matrix} 16a + 4b = 6 \\ 4a + 2b = 2,5 \end{matrix}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 0,125$, $b = 1$. (2 pont)

A parabola egyenlete: $y = 0,125x^2 + x$. (1 pont)

Az AFC parabolikus háromszög területe: $\int_0^4 (0,125x^2 + x)dx =$ (1 pont)

$= \left[\frac{0,125x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{32}{3}$. (2 pont)

A homlokzat területe (ennek kétszerese, azaz) $\boldsymbol{\frac{64}{3}\,\mathbf{m^2}}$ $(\approx 21,3\,\text{m}^2)$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

34) **Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-12x+27$ függvény grafikonja a derékszögű koordináta-rendszerben parabola.**

a) **Számítsa ki a parabola és az x tengely által bezárt (korlátos) síkidom területét!** **(5 pont)**

b) **Írja fel a parabolához az $E(5;-8)$ pontjába húzott érintő egyenletét!** **(5 pont)**

c) **Számítsa ki a parabola fókuszpontjának koordinátáit!** **(4 pont)**

Megoldás:

a) A függvény zérushelyeinek kiszámítása: $x^2-12x+27=0$, innen $x_1=3$, $x_2=9$ (1 pont)

(A függvényértékek a két zérushely között negatívak, ezért a kérdezett T területre fennáll:)

$$-T=\int_3^9(x^2-12x+27)dx=\left[\frac{x^3}{3}-12\frac{x^2}{2}+27x\right]_3^9=$$ (1 pont)

$$=\left(\frac{9^3}{3}-6\cdot9^2+27\cdot9\right)-\left(\frac{3^3}{3}-6\cdot3^2+27\cdot3\right)=$$ (1 pont)

$$=(0-36=)-36.$$ (1 pont)

A kérdezett terület nagysága tehát **36** (területegység). (1 pont)

b) *Lásd: Koordinátageometria 23. feladat*

c) *Lásd: Koordinátageometria 23. feladat*

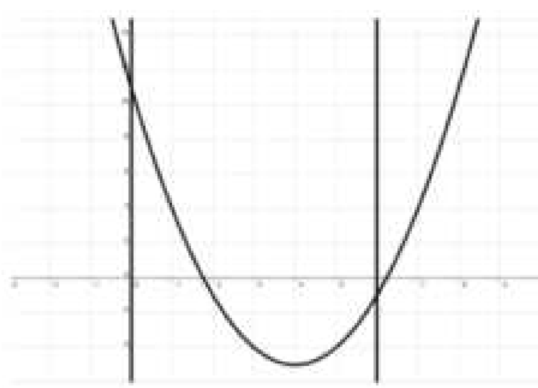
Összesen: 14 pont

35) **a)** **Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x\mapsto x^2-8x+11$ hozzárendeléssel megadott függvényt** **(3 pont)**

b) **Adja meg a $y=x^2-8x+11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét.** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A helyes parabola ábrázolása az adott intervallumon (3 pont)



b) *Lásd: Koordinátageometria 4. feladat*

36) **Egy városban bevezették a fizetős parkolást. A parkolási díj (a parkolás időtartamától függetlenül) napi 10 garas. A díjakból származó teljes bevétel a városi költségvetést illeti.**

Kezdetben nem alkalmaztak parkolóőröket. Az új rendszer bevezetése után néhány héttel megállapították, hogy naponta kb. 15 000 autós parkolt a fizetős övezetben, és mintegy 25 százalékuk „bliccelt", azaz nem fizette meg a parkolási díjat. Emiatt a városvezetés – egy előzetes hatástanulmány alapján – parkolóőrök alkalmazása mellett döntött. Az őrök ellenőrzik a díj megfizetését, és annak elmaradása esetén megbírságolják a mulasztó autóst: minden bliccelőnek 150 garast kell fizetnie (ez az összeg tartalmazza a parkolási díjat és a bírságot is).

A tanulmány azt állítja, hogy a sűrűbb ellenőrzés növelni fogja a fizetési hajlandóságot: minden egyes újabb parkolóőr alkalmazásával a bliccelők

aránya 0,5%-kal kisebb lesz (például 2 parkolóőr alkalmazása esetén 24%-ra csökken). A tanulmány számításai szerint egy parkolóőr egy nap alatt kb. 200 autót fog ellenőrizni, továbbá egy parkolóőr alkalmazásának napi költsége 330 garas, amelyet a befolyt parkolási díjakból és bírságokból kell kifizetni.

A tanulmány még a következőket feltételezte: naponta átlagosan 15 000 parkoló autó lesz, egy autót legfeljebb egy parkolóőr ellenőriz, és a bliccelők aránya a parkolóőrök által ellenőrzött autók között minden esetben ugyanannyi, mint az összes parkoló autó között.

a) A hatástanulmány becslései szerint mekkora lenne a város parkolási díjakból származó napi nettó (azaz a költségekkel csökkentett) bevétele 10 parkolóőr alkalmazása esetén? (6 pont)

b) Amennyiben a hatástanulmány becslései helytállóak, akkor hány parkolóőr alkalmazása esetén lenne a parkolási díjakból származó napi nettó bevétel maximális? (10 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 25. feladat*

b) A tanulmány szerint n fő parkolóőr alkalmazása esetén a bliccelők aránya $(25-0,5n)$ százalék $(0 \leq n \leq 50)$, a parkolóőrök alkalmazásának költsége pedig naponta $330n$ garas lenne $(n \in \mathbb{N})$. (1 pont)

A parkolási díjat a 15 000 főnek a $(75+0,5n)$ százaléka fizeti meg, az ebből származó bevétel tehát $15000 \cdot \frac{75+0,5n}{100} \cdot 10 = 112\,500 + 750n$ garas. (1 pont)

A parkolóőrök $200n$ számú ellenőrzést hajtanak végre, ennek $(25-0,5n)$ százalékában szabnak ki büntetést. (1 pont)

A büntetésből származó napi bevétel $200n \cdot \frac{25+0,5n}{100} \cdot 150 = 750n - 150n^2$ garas. (1 pont)

A napi nettó bevétel $\left(112\,500 + 750n + 7500n - 150n^2 - 330n =\right)$
$-150n^2 + 7920n + 112\,500$ garas. (1 pont)

Az $n \mapsto -150n^2 + 7920n + 112\,500$ $(n \in \mathbb{R})$ másodfokú függvény deriváltfüggvénye $n \mapsto -300n + 7920$, (1 pont)

tehát a függvény maximumhelye (a deriváltfüggvény zérushelye) a $\frac{7920}{300} = 26,4$.

(1 pont)

A napi nettó bevétel tehát 26 vagy 27 parkolóőr esetén lesz maximális. (1 pont)

26 parkolóőr esetén a bevétel 217 020 garas, 27 parkolóőr esetén pedig 216 990 garas, (1 pont)

így **26 parkolóőr** esetében lesz a legnagyobb a napi nettó bevétel. (1 pont)

Összesen: 16 pont

37) Egy zöldségárus vállalkozó egyik reggel 200 kg első osztályú barackot visz eladásra a piacra. Tapasztalatból tudja, hogy az első osztályú barack eladási egységára és a napi eladott mennyiség között (jó közelítéssel) lineáris kapcsolat van (az eladott mennyiség az eladási egységár lineáris

függvénye). Ha egész nap 500 Ft/kg áron kínálná a barackot, akkor várhatóan a fele fogyna el, míg ha 300 Ft/kg áron adná, akkor a 70%-a.

a) Mennyi lenne a zöldségárusnak az első osztályú barack eladásából származó bevétele, ha egész nap 400 Ft/kg-os egységáron kínálná a barackot? (3 pont)

b) Igazolja, hogy ha egész nap x (Ft/kg) az első osztályú barack egységára, y (kg) pedig a napi eladott mennyiség, akkor a közöttük lévő kapcsolat: $y=-\frac{1}{5}x+200\ (0<x<1000)$. (4 pont)

A nap végén a 200 kg-ból megmaradó barackot a zöldségárus másnap már nem adhatja el első osztályúként. Ezért a megmaradó teljes mennyiséget eladja egy gyümölcsfeldolgozó vállalkozásnak, mégpedig 80 Ft/kg egységáron.

c) Mekkora eladási egységáron kínálja a barackot a zöldségárus napközben, hogy a napi bevétele maximális legyen? (A napi bevétel az első osztályúként eladott barackból származó bevétel plusz a gyümölcsfeldolgozó által fizetett összeg.) (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 26. feladat*

b) *Lásd: Bizonyítások 22. feladat*

c) Ha x (Ft/kg) az eladási ár, akkor a napközben eladott barackmennyiség $-\frac{1}{5}x+200$ (kg), az ebből származó bevétel

$\left(-\frac{1}{5}x+200\right)\cdot x=\frac{1}{5}x^2+200x$ (Ft), (1 pont)

a nap végén megmaradt barackmennyiség $200-\left(-\frac{1}{5}x+200\right)=\frac{1}{5}x$ (kg),

az ebből származó bevétel pedig $\frac{1}{5}x\cdot 80=16x$ (Ft). (1 pont)

Az összes bevétel tehát x Ft/kg eladási ár esetén $-\frac{1}{5}x^2+216x$ Ft.

Keressük a $B(x)=-\frac{1}{5}x^2+216x\ (0\le x\le 1000)$ függvény maximumát. (1 pont)

$B(x)=-\frac{1}{5}(x-540)^2+58\,320$ (1 pont)

Mivel az első tag nem pozitív, ezért $B(x)\le 58\,320$. (1 pont)

A legnagyobb értékét $B(x)$ akkor veszi fel, $(x-540)^2=0$, vagyis $x=540$ (ami eleme az értelmezési tartománynak). (1 pont)

A napi bevétel tehát 540 Ft/kg egységár esetén maximális. (A maximális bevétel $B(540)=58\,320$ Ft.) (1 pont)

Összesen: 14 pont

38) Az *ABCD* négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az ábrán látható módon az EFGH paralelogrammát írjuk. Az *AH* és *CF* szakasz hossza x méter, a *BE* és *DG* szakasz hossza 2x méter $(0<x<2)$.

a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma hossza (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$. **(4 pont)**

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen! **(4 pont)**

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1,25$. **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 24. feladat*

b) $T(x) = 4(x^2 - 3x + 4) = 4(x - 1,5)^2 + 7$ (2 pont)

A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért a T-nek minimuma van az $\boldsymbol{x = 1,5}$ helyen (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel) (2 pont)

Alternatív megoldás:

T-nek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0. (1 pont)

$T'(x) = 8x - 12 = 0$. (1 pont)

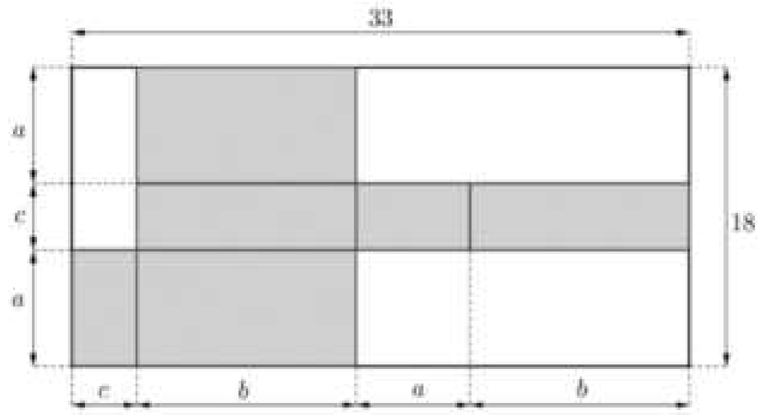
$\boldsymbol{x = 1,5}$ (ami a $0 < x < 2$ feltételnek megfelel). (1 pont)

$T''(1,5) = 8 > 0$ miatt itt valóban minimuma van T-nek. (1 pont)

c) *Lásd: Egyenletek, egyenletrendszerek 10. feladat*

Összesen: 14 pont

39) Egy 33×18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.



a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm!

b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c, élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? **(9 pont)**

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? **(4 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 32. feladat*

b) A térfogatot az egyik él hosszának segítségével fejezzük ki.

A $\left.\begin{array}{l} 2a + c = 18 \\ a + 2b + c = 33 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer első egyenletéből

$c = 18 - 2a$ (1 pont)

A második egyenletbe behelyettesítve:

$2b = 33 - a - c = 33 - a - (18 - 2a) = a + 15$,

ezért $b = \dfrac{a}{2} + 7,5$. (1 pont)

$V = abc = a\left(\dfrac{a}{2} + 7,5\right)(18 - 2a) \quad (0 < a < 9)$ (1 pont)

A $V(a)=a\left(\frac{a}{2}+7,5\right)(18-2a)\ ;0<a<9$ függvénynek ott lehet maximuma, ahol $V'(a)=0$. (1 pont)

$V(a)=-a^3-6a^2+135a$ (1 pont)

$V'(a)=-3a^2-12a+135=-3\left(a^2+4a-45\right)$ (1 pont)

$a^2+4a-45=0$ gyökei 5 és -9, a -9 nem lehetséges , az 5 pedig megfelel. (1 pont)

$V''(a)=-6a-12$ és így $V''(5)<0$, tehát V-nek (abszolút) maximuma van $a=5$ -nél. (1 pont)

A téglatest térfogata maximális ($400\ \text{cm}^3$), ha éleinek hossza $\boldsymbol{a=5}$ **cm,** $\boldsymbol{b=10}$ **cm,** ***és*** $\boldsymbol{c=8}$ **cm.** (1 pont)

c) *Lásd: Síkgeometria 35. feladat*

Összesen: 16 pont

40) Egy fafajta törzsének keresztmetszetét vizsgáljuk az adott magasságban. Ez a keresztmetszet a fa 5 és 20 éves kora közötti növekedése során (jó közelítéssel) mindvégig kör alakúnak tekinthető. A kör átmérőjét a $\boldsymbol{d:[5;20]\to\mathbb{R},\ d(x)=-0,25x^2+20x+40}$ függvény adja meg, ahol $\boldsymbol{x}$ a fa években mért életkorát, $\boldsymbol{d(x)}$ pedig az átmérő milliméterben mért hosszát jelöli.

a) Hány cm a törzs keresztmetszetének átmérője akkor, amikor a fa éppen 10 éves? (2 pont)

b) Hány $\boldsymbol{dm^2}$-rel nő a fatörzs keresztmetszetének területe a 11. évben? Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

c) Hány éves a fa akkor, amikor a törzs keresztmetszetének kerülete éppen 1 méter? (5 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) $d(10)=-0,25\cdot10^2+20\cdot10+40=215\ \text{mm}$. (1 pont)

A törzs átmérője centiméterben mérve **21.5.** (1 pont)

b) A törzs átmérője a 11. év végén $d(11)\approx230$ mm. (1 pont)

A keresztmetszet gyarapodását az $r_{11}\approx115\ \text{mm}$ és $r_{10}=107,5\ \text{mm}$ sugarú körök által határolt körgyűrű területe adja meg. (1 pont)

Ennek nagysága $r_{11}^2\pi-r_{10}^2\pi\approx5200\ \text{mm}^2$, (1 pont)

ez dm^2-ben mérve és tizedes jegyre kerekítve **0,5.** (1 pont)

c) Ha a törzs kerülete $1\ \text{m}=1000\ \text{mm}$

akkor átmérője $\frac{1000}{\pi}\approx318$ mm. (1 pont)

$d(x)=-0,25x^2+20x+40=318$,

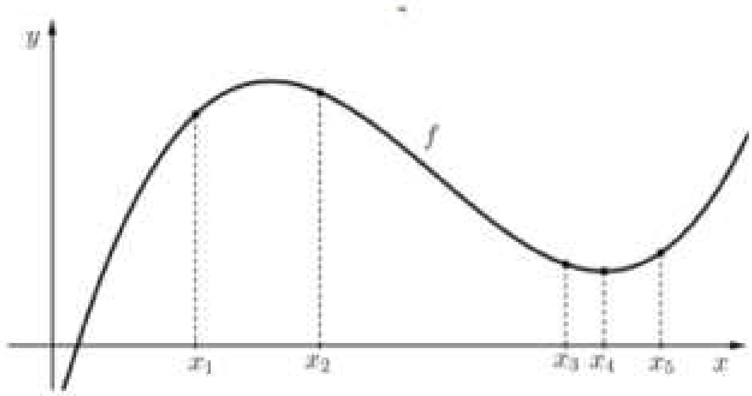
innen $x^2-80x+1112=0$. (2 pont)

$x_1\approx17,9$ és $x_2\approx62,1$. (1 pont)

$x_2>20$ nem megfelelő, tehát a fa megközelítőleg **18 éves.** (1 pont)

Összesen: 11 pont

41) a) Az ábrán a harmadfokú *f* függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet. Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az *f* első, illetve a második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába!
(Tudjuk, hogy $f'(x_4)=0$.)



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	**P**			**0**	
f'' előjele					

(4 pont)

b) Adott az $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+8$ egyenletű parabola.

Határozza meg a *k* valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x-y=k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is! **(9 pont)**

Megoldás:

a)

hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	**P**	**N**	**N**	**0**	**P**
f'' előjele	**N**	**N**	**P**	**P**	**P**

(4 pont)

d) *Lásd: Paraméter 39. feladat*

Összesen: 13 pont

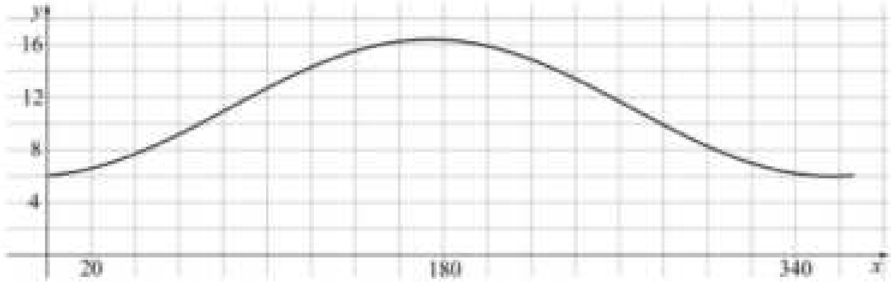
42) Az északi félteke 50. szélességi körén egy adott napon a nappal hosszát (a napfelkelte és a napnyugta között eltelt időt) jó közelítéssel a következő *f* függvénnyel lehet modellezni:

$$f(n)=-5{,}2\cos\left(\frac{n+8}{58}\right)+11{,}2,$$

ahol *n* az adott nap sorszámát jelöli egy adott éven belül, $f(n)$ pedig a nappal hossza órában számolva $(1\le n\le 365,\ n\in\mathbb{N})$.

Az alábbi ábra a $g:[1;365]\to\mathbb{R};\ g(x)=-5{,}2\cos\left(\frac{x+8}{58}\right)+11{,}2$ függvényt szemlélteti.

(A g függvény az f-nek egy folytonos kiterjesztése.)



a) Ha $x=1$, akkor $\frac{x+8}{58}$ helyettesítési értéke $\frac{9}{58}$.

Adja meg a $\frac{9}{58}$ radián értékét fokban mérve! (2 pont)

b) Számítsa ki a modell alapján, hogy az év 50. napján milyen hosszú a nappal!
Válaszát óra:perc formátumban, egészre kerekítve adja meg! (3 pont)

c) Igazolja, hogy (a modell szerint) egy évben 164 olyan nappal van, amelyik 12 óránál hosszabb! (7 pont)

Adott egy másik, az $y=-5{,}2\cos(x)+11{,}2$ egyenletű görbe, valamint az $x=0$, az $y=0$ és $x=2\pi$ egyenletű egyenesek.

d) Számítsa ki a görbe és a három egyenes által határolt korlátos síkidom területét! (4 pont)

Megoldás:

a) $\frac{9}{58}\cdot\frac{180°}{\pi}\approx \mathbf{8{,}89°}$ (2 pont)

b) $f(50)=-5{,}2\cos(1)+11{,}2$ (1 pont)

$f(50)\approx 8{,}39$ óra (1 pont)

Az 50. napon (körülbelül) **8:23 óra** (8 óra 23 perc) hosszú a nappal. (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 32. feladat*

d) A terület: $\int_0^{2\pi}(-5{,}2\cos(x)+11{,}2)\,dx$. (1 pont)

$\int_0^{2\pi}(-5{,}2\cos(x)+11{,}2)\,dx=\left[-5{,}2\sin(x)+11{,}2x\right]_0^{2\pi}=$ (2 pont)

$=(0+11{,}2\cdot 2\pi)-(0+0)\approx \mathbf{70{,}37}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

43) Egy városban a közösségi közlekedést kizárólag vonaljeggyel lehet igénybe venni, minden utazáshoz egy vonaljegyet kell váltani. A vonaljegy ára jelenleg 300 tallér. Az utazások száma naponta átlagosan 100 ezer. Ismert az is, hogy ennek kb. 10%-ában nem váltanak jegyet (bliccelnek).

A városi közlekedési társaság vezetői hatástanulmányt készítettek a vonaljegy árának esetleges megváltoztatásáról. A vonaljegy árát 5 talléronként lehet emelni vagy csökkenteni. A hatástanulmány szerint a vonaljegy árának 5 talléros emelése várhatóan 1000-rel csökkenti a napi utazások számát, és 1 százalékponttal növeli a jegy nélküli utazások (bliccelések) arányát. (Tehát például 310 talléros jegyár esetén naponta 98 000 utazás lenne, és ennek 12%-a lenne bliccelés.) Ugyanez fordítva

is igaz: a vonaljegy árának minden 5 talléros csökkentése 1000-rel növelné a napi utazások számát, és 1 százalékponttal csökkentené a bliccelések arányát. A tanulmány az alkalmazott modellben csak a 245 tallérnál drágább, de 455 tallérnál olcsóbb lehetséges jegyárakat vizsgálta.

a) Mekkora lenne a közlekedési társaság vonaljegyekből származó napi bevétele a hatástanulmány becslései alapján, ha 350 tallérra emelnénk a vonaljegyek árát? (4 pont)

b) Hány talléros vonaljegy esetén lenne maximális a napi bevétel? (12 pont)

Megoldás:

a) Az utazások száma $100\,000-10\cdot 1000=90\,000$ lenne naponta, (1 pont)
a bliccelések száma ennek a 20%-a, vagyis 18 000, az érvényes jeggyel történő utazások száma pedig így $(90\,000-18\,000=)72\,000$. (2 pont)
A napi bevétel ekkor $72\,000\cdot 350=$ **25 200 000 tallér** lenne. (1 pont)

b) A bevétel a fizető utasok számának és a vonaljegy árának szorzata.
Ha az eredeti jegyárhoz képest $5x$ tallérral változik a vonaljegy ára, akkor a jegyár $300+5x$ tallér.
A tanulmányban alkalmazott modellben $-11<x<31$, ahol x egész szám. (1 pont)
Az utazások száma 100 000-1000x, (1 pont)
a bliccelések száma pedig ennek a $(10+x)$%-a:
$(100\,000-1000x)\cdot\frac{10+x}{100}=(1000-10x)(10+x)$ lesz. (1 pont)
A fizető utasok száma így:
$100\,000-1000x-(1000-10x)(10+x)=10x^2-1900x+90\,000$ fő. (2 pont)
A jegyeladásból származó bevétel:
$(10x^2-1900x+90\,000)(300+5x)=$ (1 pont)
$=50x^3-6500x^2-120\,000x+27\,000\,000$ tallér. (1 pont)
A $]-11;31[$ nyílt intervallumon értelmezett
$f(x)=50(x^3-130x^2-2400x+540\,000)$ függvény deriváltfüggvénye
$f'(x)=50(3x^2-260x-2400)$. (1 pont)
$f'(x)=0$, ha $x\approx-8{,}41$ vagy $x\approx 95{,}08$, de ez utóbbi (az $x<31$ felvétel miatt) nem lehetséges. (1 pont)
A -8,41 helyen f' pozitívból negatívba megy át, (és $-8{,}41<x<31$ esetén negatív) ezért az f-nek -8,41-nél maximuma van (előtte szigorúan monoton növekedő, utána pedig szigorúan monoton csökkenő). (1 pont)
A feladatban x egész szám lehet csak, ezért még meg kell vizsgálni $f(-8)$ és $f(-9)$ értékét.
$f(-8)=27\,518\,400>f(-9)=27\,517\,050$, (1 pont)
tehát a vonaljegy árát $(300+5\cdot(-8)=)$ **260 tallérban** kell megállapítani. (Ekkor az utasok száma 108 000, a fizető utasok száma pedig 105 840 fő lenne.) (1 pont)

Összesen: 16 pont

44) Adott két függvény:

$f:]0; 130[\to \mathbb{R};\ f(x) = 900 - 0,25(x-60)^2$, **illetve**

$g:]0; 130[\to \mathbb{R};\ g(x) = 6,4x$.

a) Adja meg az *f* zérushelyét! **(4 pont)**

b) Számítsa ki az $f(20) - g(20)$ különbség értékét! **(3 pont)**

c) Adja meg a $h:]0; 130[\to \mathbb{R};\ h(x) = f(x) - g(x)$ függvény szélsőértékét (típusát, helyét és értékét)! **(6 pont)**

Megoldás:

a) $900 - 0,25(x-60)^2 = 0\ (0 < x < 130)$ (1 pont)

$-0,25x^2 + 30x = 0$ (1 pont)

$x = 0$ vagy $x = 120$ (1 pont)

A 0 nem eleme az értelmezési tartománynak, ezért az egyetlen zérushely a **120**.

(1 pont)

b) $f(20) = 900 - 0,25(20-60)^2 = 500$ (1 pont)

$g(20) = 128$ (1 pont)

A különbség $(500 - 128 =)$ **372**. (1 pont)

c) $h(x) = 900 - 0,25(x-60)^2 - 6,4x = -0,25x^2 + 23,6x$ (1 pont)

A h deriváltfüggvénye $h'(x) = -0,5x + 23,6\ (0 < x < 130)$. (1 pont)

Ha $h'(x) = 0$, akkor $x = 47,2$, (1 pont)

ha $0 < x < 47,2$, akkor $h'(x) > 0$ (h szigorúan monoton növekedő),

ha $47,2 < x < 130$, akkor $h'(x) < 0$ (h szigorúan monoton csökkenő), ezért **maximuma** van. (1 pont)

Tehát **47,2** a h **maximumhelye**, (1 pont)

a maximum **értéke** pedig $h(47,2) = \mathbf{556,96}$. (A függvénynek minimuma nincs). (1 pont)

Alternatív megoldás:

$h(x) = 900 - 0,25(x-60)^2 - 6,4x = -0,25x^2 + 23,6x$ (1 pont)

Az $x \mapsto -0,25x^2 + 23,6x = -0,25x(x - 94,4)\ (x \in \mathbb{R})$ másodfokú függvény **zérushelyei 0** és **94,4**, (1 pont)

főegyütthatója negatív, ezért **maximuma** van. (1 pont)

Maximumhelye $\frac{0 + 94,4}{2} = \mathbf{47,2}$. (1 pont)

$(47,2 \in]0;130[$, ezért) ez a h maximumhelye is, (1 pont)

a maximum **értéke** pedig $h(47,2) = \mathbf{556,96}$. (A függvénynek minimuma nincs.) (1 pont)

Összesen: 13 pont

45) Adott négy, a valós számok halmazán értelmezett függvény:

$\boldsymbol{f(x)=(x+4)(2-x)}$

$\boldsymbol{g(x)=x+4}$

$\boldsymbol{h(x)=x^2-4}$

$\boldsymbol{i(x)=|x|-4}$

a) Határozza meg az f és g függvények grafikonja által közrezárt korlátos síkidom területét! (7 pont)

Egy négypontú gráf csúcsait megfeleltetjük e négy függvénynek. Két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha a két megfelelő függvénynek van közös zérushelye.

b) Rajzolja fel az így kapott gráfot! (4 pont)

A valós számok halmazán értelemezett *k* függvény zérushelye -5 és 3, az *m* függvény zérushelyei 3 és -3, az *n* függvény zérushelyei pedig 5 és -5.

A *p* elsőfokú függvény hozzárendelési szabálya $p(x)=x+c$, ahol *c* egy valós szám.

c) Hányféleképpen válaszható meg a *c* konstans értéke úgy, hogy a *k*, *m*, *n* és *p* függvényekre a b) feladatban megadott szabály szerint elkészített négypontú gráf fagráf legyen? (5 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) (Az $f(x)=g(x)$ egyenlet megoldásával megkeressük a két függvénygrafikon metszéspontjait.)

$(x+4)(2-x)=x+4$

$0=x^2+3x-4$ (2 pont)

Innen $x=-4$ és $x=1$. (1 pont)

A kérdezett területet (a két metszéspont között) az $\left|\int_{-4}^{1}((x+4)(2-x)-(x+4))\,dx\right|$ értéke adja meg. (1 pont)

$$\left|\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)\,dx\right|=\left|\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{1}\right|=$$

$$=\left|\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+4\right)-\left(-\frac{-64}{3}-24-16\right)\right|=$$ (2 pont)

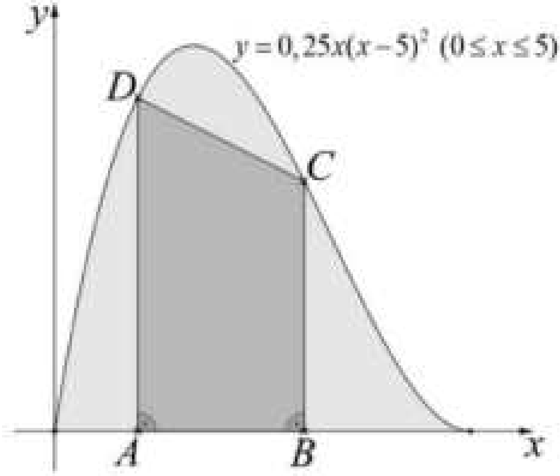
$$=\left|\frac{13}{6}-\left(-\frac{56}{3}\right)\right|=\boldsymbol{\frac{125}{6}}$$ (1 pont)

b) *Lásd: Gráfelmélet 16.feladat*

c) *Lásd: Gráfelmélet 16. feladat*

Összesen: 16 pont

46) Adott az $y = 0,25x(x-5)^2$ $(0 \le x \le 5)$ egyenletű görbe.



a) Igazolja, hogy az origó és az $(5;0)$ pont is rajta van a görbén!

Az *ABCD* derékszögű trapéz egyik szárának két végpontja az $A(1;0)$, illetve a $B(3;0)$ pont, a másik két csúcsa pedig a megadott görbén van, az ábra szerint. A megadott görbe és az x tengely $[0;5]$ szakasza egy korlátos síkidomot fog közre.

b) Ha véletlenszerűen kiválasztjuk ennek a korlátos síkidomnak egy pontját, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a trapéznak is pontja lesz? (10 pont)

Megoldás:

a) Azt kell belátni, hogy a pontok koordinátái igazzá teszik a görbe egyenletét. Az origó esetében: $0,25 \cdot 0 \cdot (0-5)^2 = 0$ igaz, (1 pont)

1 pont az $(5;0)$ pont esetében: $0,25 \cdot 5 \cdot (5-5)^2 = 0$ igaz. (1 pont)

Tehát mindkét pont valóban rajta van a görbén.

b) A kérdezett valószínűség a trapéz és a korlátos síkidom területének hányadosa. (1 pont)

A görbe az $f:[0;5] \to \mathbb{R}$; $f(x) = 0,25x(x-5)^2$ függvény grafikonja.

A síkidom területe:

$\int_0^5 0,25x(x-5)^2 dx =$ (1 pont)

$= \int_0^5 0,25(x^3 - 10x^2 + 25x)\, dx =$ (1 pont)

$= 0,25\left[\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3} + 25\frac{x^2}{2}\right]_0^5 =$ (2 pont)

$= \frac{625}{48} \approx 13,02$. (1 pont)

A D pont első koordinátája 1, második koordinátáját a trapéz egyik alapjának hosszát behelyettesítve kapjuk: $0,25 \cdot 1 \cdot (1-5)^2 = 4$. Tehát $D(1;4)$. (1 pont)

Hasonlóan C pont első koordinátája 3, második koordinátája pedig a trapéz másik alapjának hossza: $0,25 \cdot 3 \cdot (3-5)^2 = 3$. Tehát $C(3;3)$. (1 pont)

Mivel a trapéz magassága (az AB szakasz hossza) 2, így a trapéz területe

$\frac{4+3}{2} \cdot 2 = 7$. (1 pont)

A kérdezett valószínűség $\frac{7}{13,02} \approx 0,538$, vagy

pontos érték szerint $\mathbf{\frac{7}{\frac{625}{48}} = 0,5376}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

47)

a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van.

(6 pont)

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{3}{(1+\cos x)^2 + 2}$ függvény értékkészlete az $\left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$ intervallum. **(5 pont)**

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz? **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Paraméter 15. feladat*

b) Mivel $-1 \le \cos x \le 1$, (1pont)

ezért $0 \le (1+\cos x)^2 \le 4$, (1 pont)

$2 \le (1+\cos x)^2 + 2 \le 6$. (1 pont)

A pozitív számok halmazán az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő,

ezért $\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{1}{(1+\cos x)^2 + 2} \ge \dfrac{1}{6}$. (1 pont)

Ebből következik, hogy $\dfrac{3}{2} \ge \dfrac{3}{(1+\cos x)^2 + 2} \ge \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, **tehát a megadott kijelentés valóban igaz, hiszen *f* folytonos függvény.** (1 pont)

c) *Lásd: Halmazok 14 feladat*

Összesen: 16 pont

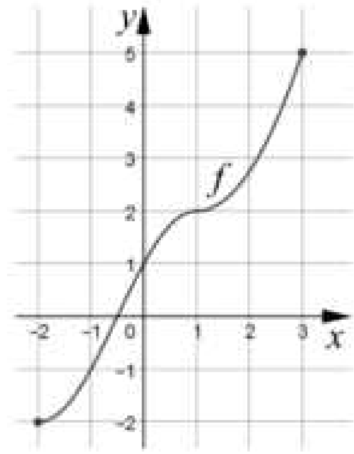
48) Egy nyolcfős csapat kosárlabdaedzése közben mind a nyolcan 10-szer kíséreltek meg hárompontost dobni. A sikeres dobások számát mind a nyolc főnél felírták. A feljegyzett számok: 6, 3, 7, 6, 4, 7, 8 és 7.

a) Határozza meg a sikeres dobások számának átlagát, mediánját és szórását! **(4 pont)**

A kosárlabda büntetődobást 4,6 méter távolságról kell elvégezni, a gyűrű 3 méter magasan van. Petra a dobás pillanatában 2 méter magasságból engedi el a labdát, és az ideális, vízszintessel bezárt $45°$-os szögre törekszik a dobás indításánál.

b) Petra dobásának modellezéséhez határozza meg annak a parabolának az egyenletét, amely áthalad a $P(0;2)$ és a $Q(4{,}6;3)$ ponton, a P pontban húzott érintőjének irányszöge pedig $45°$! A parabola egyenletét $y = ax^2 + bx + c$ alakban adja meg! **(8 pont)**

Az ábrán a $[-2;3]$ intervallumon értelmezett szigorúan monoton, folytonos f függvény grafikonja látható.



c) Adja meg az f inverzfüggvényének értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét, és jellemezze az inverzfüggvényt monotonitás szempontjából! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 21. feladat*

b) A parabola az $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ másodfokú függvénynek a grafikonja ($a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$). Ez derüljön ki a megoldásból. (1 pont)

A szöveg alapján $f(0) = 2$, tehát $c = 2$. (1 pont)

$f'(0) = m = tg45^\circ = 1$. (1 pont)

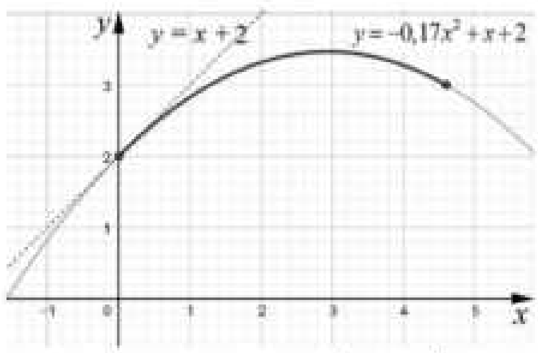
Mivel $f'(x) = 2ax + b$, (1 pont)

ezért $f'(0) = b = 1$. (1 pont)

$f(4,6) = a \cdot 4,6^2 + b \cdot 4,6 + c = 3$, (1 pont)

$21,16a = -3,6$, ebből $a = -\frac{90}{529} \approx -0,17$. (1 pont)

A keresett parabola egyenlete $\boldsymbol{y = -0,17x^2 + x + 2}$. (1 pont)

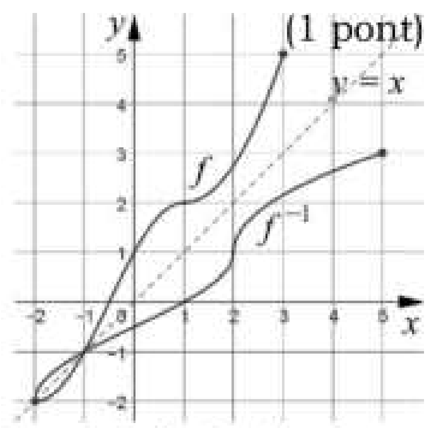


c) Az inverzfüggvény értelmezési tartománya $[-2;5]$, (1 pont)

értékkészlete $[-2;3]$, (1 pont)

zérushelye 1, (1 pont)

szigorúan monoton növekedő. (1 pont)



Összesen: 16 pont

49) Egy sorsjegyből jelenleg havonta átlagosan 5000 darabot értékesítenek. Egy darab sorsjegy ára 500 Ft, de a forgalmazó cég ezt csökkenteni szeretné. A sorsjegy ára 10 Ft-os lépésekben csökkenthető. Azt feltételezik, hogy ha az ár n-szer 10 Ft-tal alacsonyabb lesz, akkor havonta $10n^2$ -tel több sorsjegyet tudnak eladni $(n \in \mathbb{N}^+)$. Tekintsük ezt a feltételezést helytállónak.

a) Határozza meg a sorsjegyek eladásából származó havi bevételt, ha a sorsjegy árát 300 Ft-ra csökkentik! (3 pont)

b) Határozza meg azt az n értéket, amelyre a sorsjegyek eladásából származó havi bevétel maximális lenne! (9 pont)

Az összes sorsjegy 5%-a nyerő. Kétféle nyeremény van: 2500 Ft-os és 50000 Ft-os. A 2500 Ft-os nyerő sorsjegyből pontosan 24-szer annyi van, mint az 50000 Ft-osból.

c) Töltse ki az alábbi táblázat üres mezőit, majd számítsa ki egy darab sorsjegy nyereményének várható értékét! (4 pont)

1 db sorsjegy nyereménye (Ft)	0	2500	50000
nyeremény valószínűsége	0,95		

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 39. feladat*

b) Tegyük fel, hogy n-szer csökkentették 10 Ft-tal az árat, ekkor az új ár $500-10n$ (Ft) (ahol $n<50$), (1 pont)

és a havi eladott darabszám $5000+10n^2$. (1 pont)

Az eladásból származó bevétel Ft-ban: $(500-10n)\left(5000+10n^2\right)=$

$=-100n^3+5000n^2-50000n+2500000$. (1 pont)

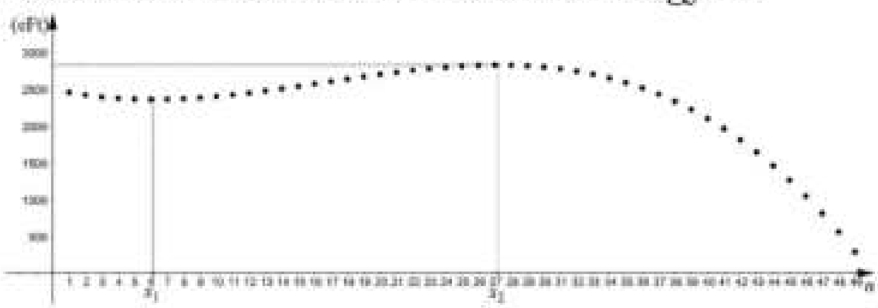
Tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett $f(x)=-100x^3+5000x^2-50000x+2500000$ függvényt. (1 pont)

Ennek deriváltfüggvénye $f'(x)=-300x^2-10000x-50000$ $(x\in\mathbb{R})$, (1 pont)

melynek zérushelyei $x_1\approx 6{,}13$ és $x_2\approx 27{,}21$. (1 pont)

A deriváltfüggvény pontosan a két gyök között pozitív, és x_2-ben pozitívból negatívba vált, ezért x_2 az f maximumhelye (x_1-ben negatívból pozitívba vált a deriváltfüggvény). Vagy vizsgálható, hogy $f''(x_1)>0$ és $f''(x_2)<0$, ami miatt f-nek x_2 a maximumhelye. (1 pont)

(n értéke csak egész lehet:) $f(27)=2826700>f(28)=2824800$, ezért 27-szer 10 Ft-tal (230 Ft-ra) kell csökkenteni a sorsjegy árát ahhoz, hogy az értékesítésből származó havi bevétel maximális legyen. (2 pont)



c) *Lásd: Valószínűségszámítás 60. feladat*

Összesen: 16 pont

50)

a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left(2^x-3\right)^2=2^{x+1}+9$$ **(7 pont)**

Legyen $f(x)=x^2-9x+14$, ahol x valós szám.

Tekintsük a következő állítást: „Ha $x>7$, akkor $f(x)>0$.”

b) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszát indokolja! **(4 pont)**

c) Fogalmazza meg az állítás megfordítását! Igaz-e az állítás megfordítása? Válaszát indokolja! **(3 pont)**

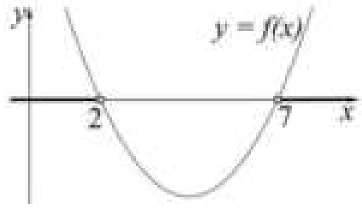
Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 18. feladat*

b) Az állítás **igaz.** (1 pont)

$x^2-9x+14=0$ valós gyökei 2 és 7. (1 pont)

Az $x \mapsto x^2-9x+14$ másodfokú függvény **grafikonja „felfelé nyitott" parabola**, tehát ha $x>7$, akkor $f(x)>0$ teljesül. (2 pont)



c) Megfordítás: **Ha $f(x)>0$, akkor $x>7$.** (1 pont)

A megfordítás **hamis.** (1 pont)

Egy ellenpéldával indokolható. **Például $x=0$ esetén $f(x)=14>0$, de $x\le 7$.** (1 pont)

Alternatív megoldás:

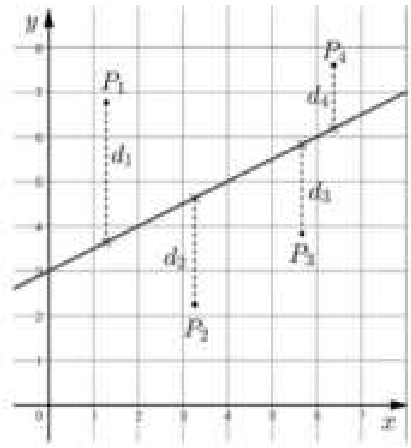
c) Megfordítás: **Ha $f(x)>0$, akkor $x>7$.** (1 pont)

A megfordítás **hamis.** (1 pont)

A b) rész megoldása alapján: ha $x<2$, akkor $f(x)>0$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

51) A statisztikai értékelések során szükség van az adatokat és összefüggéseket szemléltető pontok és egyenesek kölcsönös helyzetének jellemzésére. Egy ilyen jellemző lehet a pontnak egy megadott egyenestől mért *függőleges távolsága*.



Az ábrán látható P_1, P_2, P_3, P_4 pontok esetén a függőleges távolságok rendre a d_1, d_2, d_3, d_4 szakaszok hosszával egyenlők. (A távolságokat megadó szakaszok párhuzamosak az *y* tengellyel.)

a) Határozza meg az $R(4;2)$ és az $S(4;5)$ pontok *függőleges távolságát* az $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ egyenestől! **(3 pont)**

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az adatokat pontokkal jelenítjük meg, és különböző egyeneseket veszünk fel, akkor mindegyik egyeneshez kiszámítható a pontok függőleges távolságainak négyzetösszege (az ábrán látható példában $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$).

Tekintsük azt az egyenest a *pontokra legjobban illeszkedő egyenesnek*, amelyre ez a négyzetösszeg a lehető legkisebb.

Adott három pont a koordináta-rendszerben: $A(1;3)$, $B(3;5)$ és $C(4;4)$.

b) Adja meg az *m* értékét úgy, hogy az $y=mx$ egyenletű (origón átmenő) egyenes a megadott módszer szerint a *legjobban illeszkedjen az A, B* és *C* pontokra! $(m\in\mathbb{R})$ **(6 pont)**

Az $y=\frac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)$ egyenletű g görbe áthalad a megadott *A* és *B* pontokon, a *h* egyenes pedig az origón és a *C* ponton.

c) Mekkora a *g* és *h* által közbezárt korlátos alakzat területe? (7 pont)

Megoldás:

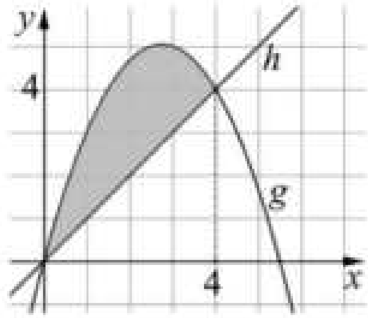
a) *Lásd: Koordinátageometria 29. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 29. feladat*

c) A h egyenes egyenlete $y = x$. (1 pont)

Megkeressük g (parabola) és h közös pontjait: $\frac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)=x$. (1 pont)

Nullára rendezve: $0 = 2x^2 - 8x$,
ahonnan $x = 0$, illetve $x = 4$.
(Két közös pont van, az origó és a $C(4;4)$ pont.) (1 pont)



A két metszéspont között a parabola az egyenes fölött helyezkedik el, ezért a keresett területet az

$\int_0^4 \left(\frac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)-x\right)dx$ integrál értéke adja. (1 pont)

$\int_0^4 \left(\frac{1}{3}\left(-2x^2+11x\right)-x\right)dx = \left[-\frac{2}{9}x^3+\frac{4}{3}x^2\right]_0^4 =$ (2 pont)

$\left(= -\frac{2}{9}\cdot 4^3 + \frac{4}{3}\cdot 4^2\right) = \mathbf{\frac{64}{9}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont